Sistemas Lineales 1

Rejunte de ejercicios teóricos

1. Sea $S = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in C^\infty : \lim_{|t|\to\infty} t^k \varphi^{(l)} = 0 \ \ \forall \ \ l, k \in \mathbb{N}\}$ el espacio de funciones temperadas. Probar que si $\varphi \in S$ entonces tiene sentido $\mathcal{F}[\varphi]$, además que $\mathcal{F} : S \to S$ es decir que $\forall \varphi \in S$, $\mathcal{F}[\varphi] \in S$. Se sugiere el siguiente esquema de prueba:

- $t^l \varphi^{(m)} \in \mathcal{L}_1 \ \ \forall \ \ l, m \in \mathbb{N}$
- $(t^l \varphi)^{(n)} \in \mathcal{L}_1 \ \ \forall \ \ l, n \in \mathbb{N}$
- Probar que $\mathcal{F}[\varphi] \in C^\infty$, luego considerar $\mathcal{F}[(t^l\varphi)^{(n)}]$ y el teorema de Lebesgue, conocido por la propiedad 4.

Como corolario del ejercicio explicar porque tiene sentido la definición de transformada de Fourier en distribuciones temperadas.

2.

(a) Definir el concepto de *distribución temperada.*

(b) Sea $g(t)$ una función periódica localmente integrable de periodo T. Mostrar que su distribución asociada es temperada. (Sugerencia: recordar que $lim_{n\to\infty} c_n(g) = 0$)

(c) Sea $g_1(t) = g(t)[Y(t) - Y(t-T)]$. Mostrar que $C_n = \frac{1}{T} G_1(n\frac{2\pi}{T})$, siendo G_1 la transformada de Fourier de g_1.

(d) Mostrar que

$$g(t) = g_1(t) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)$$

(e) Mostrar que

$$G(f) = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} G_1(n\frac{2\pi}{T})\delta(f - n\frac{2\pi}{T})$$

3.

(a) Hallar la Transformada de Fourier y la transformada de Fourier Conjugada de la delta de Dirac, a partir de las respectivas definiciones para distribuciones cualesquiera.

(b) A partir de la relación entre la TdF y la TdFC, hallar la TdF de la función idénticamente igual a 1.

(c) Sea $G(f)$ la TdF de una función transformable $g(t)$ y sean θ y f_c reales positivos. Hallar, de al menos dos maneras diferentes, la TdF de $g(t)cos(w_c t + \theta)$, donde $w_c = 2\pi f_c$.

(d) Calcular la TdF de $Y(t)e^{-t}sen(w_c t)$

4. Sea $g(t) \in \mathcal{L}_1$, y $G(f)$ su Transformada de Fourier: $G(f) = A(f) + jB(f)$.

(a) Indicar cuál es la T. de Fourier de $g(-t)$. Justificar.

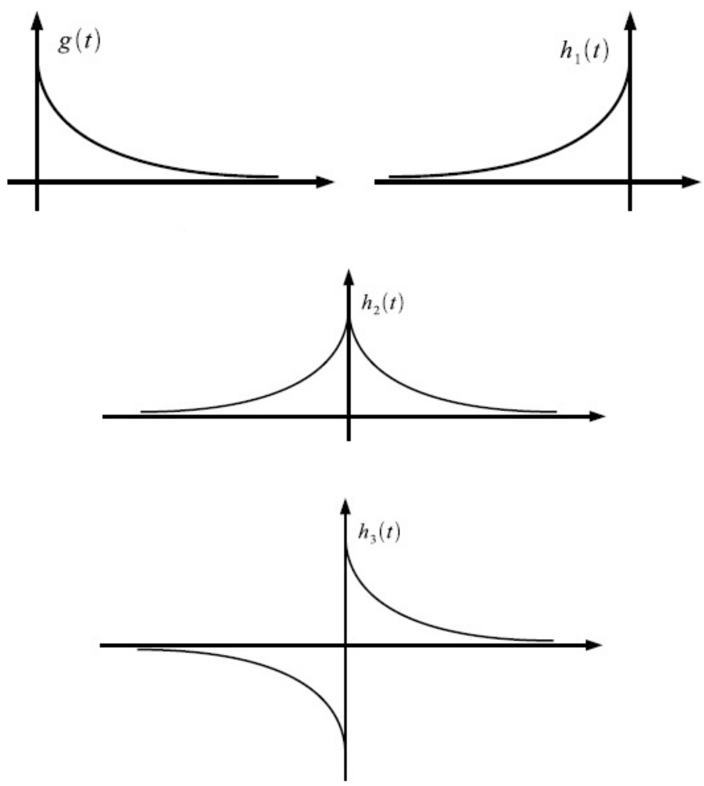
(b) Si $g(t)$ es real, probar que $\overline{G(f)} = G(-f)$.

Aplicación: Sea $g(t) = Y(t)e^{-at}$, con $a > 0$.

(c) Hallar $A(f)$ y $B(f)$.

(c) Verificar que $A(f)$ es par y $B(f)$ es impar.

(c) Calcular las T. de Fourier de $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$.



5.

(a) Deducir la expresión general de la derivada de la distribución asociada a la función localmente integrable que presenta un salto en el origen.

(b) Definir el cambio de variable en distribuciones, explicando por qué se define de esa manera.

(c) Sea $T(t)$ la distribución asociada a la función $Y(-t)$, siendo Y el escalón. Probar que $T'(t) = -\delta(t)$. (Sugerencia: observar que $Y(t) + Y(-t) = 1$).

(d) Sean $g_1(t)$ y $g_2(t)$ dos funciones C^1 que cumplen $g_1(0) = g_2(0)$ y satisfacen la ecuación diferencial: $x'' + w^2 x = 0$, con $w > 0$. Mostrar que la distribución $S(t)$ asociada a la función $Y(t)g_1(t) + Y(-t)g_2(-t)$ verifica la identidad $S'' + w^2 S = c\delta$, hallando el valor adecuado de c.

6. Se sabe que, si tanto g como $tg(t)$ viven en $\mathcal{L}_1$ se verifica que $\frac{d}{df}\mathcal{F}[g(t)](f) = \mathcal{F}[(-j2\pi t)g(t)](f)$. A partir de la definición de transformada de Fourier para distribuciones en S' probar que *derivar en el tiempo equivale a multiplicar en frecuencia.* Como corolario del ejercicio explicar porque, a diferencia de la serie de fourier en distribuciones, esta propiedad no sirve para calcular la transformada de Fourier de T a partir de la de T'.

7. Sea T la distribución asociada la función constante identicamente 1. Observar que es temperada y luego usando la propiedad del ejercicio anterior hallar $\mathcal{F}[T]$. Recordar la proposición 2.5 de las notas teóricas que dice:

Proposición 1. *Sea $T \in \mathcal{D}'$, $\alpha \in C^\infty$ tal que presenta única raíz en t=0 y es además raíz simple. Entonces $\alpha(t)T(t) = \mathcal{O}(t)$ si y solo si $T(t) = C\delta(t)$, donde C es una constante.*

Para determinar la constante recordar que $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ es un punto fijo de la transformada y además integra 1 en la recta real.