Densidad Espectral de Potencia de una señal P.A.M.

Sistemas de Comunicación

1. Densidad Espectral de Potencia

La Densidad Espectral de Potencia para un proceso estocástico estacionario $x(t)$ se define como

$$G_x(f) = \lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\left\{|X_T(f)|^2\right\} \tag{1}$$

donde $X_T(f)$ es la Transformada de Fourier del proceso truncado

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

y

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\, e^{-j2\pi f t}\ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\ \mathrm{d}t$$

2. Teorema de Wiener-Kinchine

Dado un proceso estocástico estacionario en sentido amplio, $x(t)$, la Densidad Espectral de Potencia del mismo, definida por la ecuación (1), puede calcularse como la Transformada de Fourier de la autocorrelación de $x(t)$, $\mathcal{R}_x(\tau)$,

$$G_x(f) = \mathcal{F}\left\{\mathcal{R}_x(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\ \mathrm{d}\tau \tag{2}$$

y de forma inversa

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{G_x(f)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\ \mathrm{d}f$$

Con la condición que la autocorrelación, $\mathcal{R}_x(\tau)$, sea suficientemenete pequeña para valores grandes de τ, lo cual se traduce en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau\mathcal{R}_x(\tau)|\ \mathrm{d}\tau < \infty$$

La demostración de este teorema no entra en los objetivos del curso. Se puede consultar, por ejemplo, en [1].

3. Señal P.A.M. digital

Consideremos un fuente discreta que genera símbolos $a[n] = a_n$ cada T_s segundos. La modelaremos como un proceso estocástico estacionario.

Para transmitir los valores de esta fuente por un canal analógico utilizaremos una modulación por amplitud de los pulsos. Es decir, se enviará un tren de pulsos $p(t)$ de periodicidad T_s, donde la amplitud del pulso n-ésimo es proporcional al valor de la fuente a_n. La expresión para ésta señal en el tiempo es

$$x_{\mathrm{PAM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \, p(t - nT_s - t_d) \tag{3}$$

donde t_d es un retardo aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo $[0, T_s]$, de forma que el proceso $x_{\mathrm{PAM}}(t)$ es un proceso estacionario; y $p(t)$ es el pulso de conformación, de período T_s.

Para calcular de Densidad Espectral de Potencia de $x_{\mathrm{PAM}}(t)$ utilizaremos el Teorema de Wiener-Kinchine (ver sección §2).

Consideremos el tiempo de truncamiento $T = (2k+1)T_s$ de modo que haya un número entero de pulsos en T. Considerar el límite en T será similar a considerar el límite con k; entonces con $k \gg 1$

$$x_T(t) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \, p(t - nT_s - t_d)$$

y su Transformada de Fourier

$$X_T(f) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \, P(f) \, e^{-j2\pi f(nT_s + t_d)}$$

El módulo al cuadrado de $X_T(f)$ se calcula multiplicando $X_T(f)$ por su conjugado

$$|X_T(f)|^2 = X_T(f) X_T^*(f) =$$

$$= \sum_{n=-k}^{k} a_n \, P(f) \, e^{-j2\pi f(nT_s + t_d)} \sum_{m=-k}^{k} a_m^* \, P^*(f) \, e^{j2\pi f(mT_s + t_d)} =$$

$$= |P(f)|^2 \left(\sum_{n=-k}^{k} a_n \, e^{-j2\pi f(nT_s)} \right) \left(\sum_{m=-k}^{k} a_m^* \, e^{j2\pi f(mT_s)} \right)$$

El siguiente paso es tomar esperanza de la expresión anterior. Es posible intercambiar la esperanza con las sumatorias debido a la linealidad de la esperanza.

$$\mathrm{E}\left\{ |X_T(f)|^2 \right\} = |P(f)|^2 \sum_{n=-k}^{k} \sum_{m=-k}^{k} \mathrm{E}\left\{ a_n a_m^* \right\} e^{-j2\pi f(n-m)T_s}$$

Debido a que la fuente a_n es estacionaria sustituimos la esperanza por la autocorrelacíon en la diferencia de los tiempos

$$\mathrm{E}\left\{|X_T(f)|^2\right\} = |P(f)|^2 \sum_{n=-k}^{k} \sum_{m=-k}^{k} \mathcal{R}_a(n-m)\, e^{-j2\pi f(n-m)T_s}$$

Utilizaremos ahora el siguiente resultado cuya demostración queda como

Ejercicio 1.

$$\sum_{n=-k}^{k} \sum_{m=-k}^{k} h(n-m) = (2k+1) \sum_{n=-2k}^{2k} \left(1 - \frac{|n|}{2k+1}\right) h(n)$$

Usando $h(n-m) = \mathcal{R}_a(n-m)\, e^{-j2\pi f(n-m)T_s}$

$$\mathrm{E}\left\{|X_T(f)|^2\right\} = |P(f)|^2 (2k+1) \sum_{n=-2k}^{2k} \left(1 - \frac{|n|}{2k+1}\right) \mathcal{R}_a(n)\, e^{-j2\pi n f T_s}$$

Para finalizar debemos dividir por $T = (2k+1)T_s$ y tomar el límite.

$$\lim_{T\uparrow\infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\left\{|X_T(f)|^2\right\} = \lim_{k\uparrow\infty} \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sum_{n=-2k}^{2k} \left(1 - \frac{|n|}{2k+1}\right) \mathcal{R}_a(n)\, e^{-j2\pi n f T_s} =$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{T_s} \lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=-2k}^{2k} \left(1 - \frac{|n|}{2k+1}\right) \mathcal{R}_a(n)\, e^{-j2\pi n f T_s}$$

Para resolver el límite en k nos valdremos del siguiente resultado, que también queda como

Ejercicio 2.

$$\lim_{k\uparrow\infty} \sum_{n=-2k}^{2k} \left(1 - \frac{|n|}{2k+1}\right) \mathcal{R}_a(n)\, e^{-j2\pi n f T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_a(n)\, e^{-j2\pi n f T_s}$$

Usando este resultado la expresión final para la Densidad Espectral de Potencia de la señal PAM queda

$$G_{x_{\mathrm{PAM}}}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s}\, G_a(f)$$

donde usamos la definición de la

$$G_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_a(n)\, e^{-j2\pi n f T_s}$$

En el caso particular (el más utilizado) donde $\mathrm{E}\{a_n\} = m_a^2$, $\mathrm{E}\left\{a_n^2\right\} = \sigma_a^2$ y $\mathrm{E}\{a_n a_m\} = 0$ la fuente tiene una autocorrelación de la forma

$$\mathcal{R}_a(n) = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2 & n = 0 \\ m_a^2 & n \neq 0 \end{cases}$$

y la expresión de la Densidad Espectral de Potencia queda

$$G_{x_{\mathrm{PAM}}}(f) = \sigma_a^2 \, f_s |P(f)|^2 + (m_a \, f_s)^2 \sum_n |P\,(n\,f_s)|^2 \, \delta(f - nf_s)$$

donde $f_s \, T_s = 1$.

Referencias

[1] *"Digital and Analog Commmunication Systems"*, Leon W. Couch II, Macmillan Publishing Company, 1993, ISBN:0-02-325281-2.