# Sistemas de Comunicación
# Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

6 de julio de 2018

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Problema 1 [10 pts.]

Se considera un sistema de transmisión de pulsos bandabase para enviar información de una fuente binaria. Los símbolos $A_k$ son independientes y equiprobables. Se utiliza señalización polar de amplitud $A$. El pulso conformador lo llamaremos $p(t)$. El canal es de ancho de banda limitado $B_C$ y además introduce ruido blanco gaussiano no correlacionado con la señal.

(a) En principio se usan pulsos rectangulares para conformar la señal. Realice un diagrama del sistema completo. Explique brevemente qué es la interferencia inter-simbólica (ISI) y qué efectos tendrá sobre el sistema. ¿Qué condición debe cumplir el tiempo entre símbolos para que ésta sea despreciable en este canal?

(b) Considere nuevamente un pulso genérico $p(t)$. Muestre qué condición en el tiempo debe cumplir éste para que no exista ISI.

(c) Halle la máxima tasa de bits que es capaz de obtener un sistema sin ISI con el canal considerado. Comparelo con la primera parte.

## Problema 2 [15 pts.]

Se desea enviar voz utilizando un sistema PCM binario. Las posibles señales analógicas $x(t)$ están normalizadas ($|x(t)| < 1$), y se modelarán como un proceso estocástico con densidad espectral de potencia $G_x(f) = \frac{1}{W_x}\Lambda(\frac{f}{W_x})$ donde $W_x = 3$ kHz.
El canal cumple con las hipótesis habituales, con ancho de banda $B_C = 20$ kHz, y ruido aditivo blanco gaussiano de densidad espectral de potencia $N_0/2$ (con $N_0 = 10^{-13}$ Watts/Hz) y atenuación $L = 100$ en potencia.
Para transmitir por el canal se utiliza codificación polar y pulsos con retorno a cero, con *duty cycle* del 50% (i.e. $p(t) = \Pi(2t/T)$). En recepción se utiliza un filtro pasabajos de ancho de banda $B_R$ a determinar. La electrónica del amplificador receptor también induce un ruido blanco gaussiano de densidad espectral de potencia $N_A/2$ (con $N_A = 10^{-9}$). Para recuperar los bits asumimos que se muestrea en el instante óptimo y luego se compara con el umbral óptimo (asumiendo bits equiprobables).

(a) Indique qué valores podría tomar $n$ (la profundidad en bits del cuantizador) y tome aquel $n$ con el que se obtiene la mejor calidad de audio en detección. Para este valor, calcule la máxima tasa de muestreo de la señal $x(t)$. Justifique los criterios escogidos.

De aquí en adelante se usarán los valores calculados en la parte anterior.

(b) Halle $P_e$, la probabilidad de error de bit del sistema de decisión, en función de la SNR en recepción.

(c) Bosquejar la SNR en detección en función de la SNR en recepción resultante. Indique en la curva la región óptima de trabajo. ¿Qué potencia de transmisión elegiría para trabajar?

Ahora un colega le sugiere utilizar un repetidor regenerativo en la mitad del canal (con etapas de recepción y transmisión idénticas al original) para mejorar el desempeño del sistema ya implementado. Entonces usted se hace las siguientes preguntas:

(d) ¿Es posible mejorar la calidad de audio con el cambio sugerido? ¿Es posible mantener la calidad de audio con una potencia de transmisión menor? Justifique.

## Problema 3 [15 pts.]

Un sistema de comunicación binaria usa dos formas de onda $p_1(t)$ y $p_0(t)$ para enviar los bits '1' y '0' respectivamente. Éstos tienen la forma siguiente:

$$p_0(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi k t/T\right) \Pi(t/T), \tag{1}$$

$$p_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi (k+1) t/T\right) \Pi(t/T), \tag{2}$$

con $T$ el tiempo entre bits y $k$ una constante entera distinta de cero.

(a) Pruebe que $p_0(t)$ es ortogonal a $p_1(t)$ y calcule la energía de cada forma de onda. Elija una base ortonormal para las formas de onda y dibuje la constelación resultante.

(b) Realice un diagrama del transmisor y calcule la potencia de transmisión del sistema en función de sus parámetros.

El sistema será utilizado en la comunicación con tierra de un satélite de órbita baja (una distancia aproximada de 2000 km) con un valor de $k$ tal que la señal estará centrada alrededor de aproximadamente 440 MHz. Suponga que la atenuación del canal se puede modelar con la fórmula de propagación de vacío:

$$L(d) = \frac{1}{G} \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2, \tag{3}$$

con $\lambda = c/f$ la longitud de onda ($c \sim 3 \times 10^8$ m/s), $d$ la distancia en metros y $G = 40\,\text{dB}$ una constante que modela el uso de antenas parabólicas para la comunicación. A su vez, el canal y los amplificadores introducen un ruido blanco gaussiano no correlacionado con la señal con densidad espectral de potencia $N_0/2 = 10^{-11}$ W/Hz en total.

(c) Diseñe un receptor óptimo para las condiciones anteriores asumiendo bits equiprobables.

(d) Calcule la potencia de transmisión si se desea una probabilidad de error de bit $P_e < 10^{-3}$ a una tasa de bits de 64 kbps.

## Problema 4 [10 pts.]

Suponga que un tipo de archivo de largo $M$ bits en un disco duro puede modelarse como una cadena de '0's y '1's de largo $M$ de la forma $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_M)$, donde cada $X_i$ $(i = 1, \ldots, M)$ es un símbolo aleatorio, todos independientes entre sí, y tales que $P(X_i = \text{'0'}) = P(X_i = \text{'1'}) = 0.5 \, \forall i = 1, \ldots, M$.

(a) Justifique porqué se podría decir que un archivo como éste es imposible de comprimir a un tamaño menor que $M$ bits.

Para enviar este archivo de una computadora a otra, se usará un sistema BPSK con probabilidad de error de bit igual a $P_e$, tal que la capacidad de Shannon del canal resultante es igual a $C = 0.5$ bits de información por uso del canal.

(b) Al ver que el canal tiene probabilidad de error no despreciable, se decide codificar la información con repetición. Es decir, por cada '0' en el archivo original, se envían tres veces consecutivas el símbolo '-A' por el canal, y por cada '1' se envían tres veces consecutivas 'A'. Calcule la tasa de este código en bits de información por uso del canal y verifique que es menor que la capacidad del canal.

(c) A pesar de estar usando una tasa menor a la capacidad del canal, usted verifica mediante mediciones que la probabilidad de error sigue sin ser despreciable. Justifique porqué esto no significa que el teorema de codificación de canal esté errado.

# Solución

## Problema 1

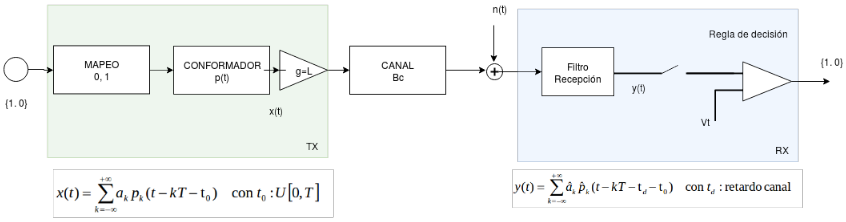


Figure 1: Diagrama del sistema

**(a)** La interferencia intersimbólica es cuando al sub-sistema decisión, al momento de decidir cuál era el símbolo k-ésimo, ingresa una muestra que depende de varios símbolos anteriores, y no sólo del k-ésimo. Esto puede deberse a errores en el sistema de sincronismo temporal, o a un canal con repuesta en frecuencia no plana (o sea, que distorsione los pulsos). Los efectos sobre el sistema serán una mayor tasa de error que si la ISI no estuviera, pues aparece como un "ruido" superpuesto al que ya introduce el canal.
En este caso particular es necesario que un pulso rectangular de largo $T$ pase sin distorsiones por un canal de ancho de banda $B_C$. Como siempre, ésto es teóricamente imposible, pero si la energía por fuera de la banda $B_C$ es despreciable, entonces lograremos que el pulso no quede significativamente distorsionado. Existen varios criterios, pero está claro que $B_C$ debería ser al menos mayor que la mitad del lóbulo principal del sinc (la transformada del pulso, y por lo tanto el término que aparece en la densidad espectral de potencia de la señal enviada). Por lo tanto, $B_C > 1/2T$. De todas formas, éste es un criterio bastante conservador que presentará algo de ISI, y sería más razonable considerar $B_C > 1/T$.

**(b)** Una primera condición es, dado el canal, que el pulso debe tener ancho de banda menor a $B_C$. De este modo el canal no distorsiona y lo puedo ignorar en el análisis que sigue. En el tiempo, esto significa que tiene largo temporal teóricamente infinito (en la práctica será enventanado, algo que también ignoraremos en lo que sigue). Además, supondremos que estamos usando un receptor apareado, lo que surge de la discusión anterior.
Con un receptor apareado, y sincronización perfecta, la muestra que entra al bloque de decisión para el símbolo k-ésimo es $\sum_l a_l g(kT - lT)$, con $g(t) = p(t) * p(-t)$ y $a_l$ el símbolo l-ésimo. Por lo tanto, si queremos que no haya ISI basta con que se cumpla que $g(0) = 1$ y $g(lT) = 0 \, \forall l \neq 0$.

**(c)** De la discusión anterior, se puede ver que $g(t)$ es tal que sus muestras tomada cada tiempo de símbolo son una delta discreta. Por lo tanto, su transformada de Fourier será tal que periodizada cada $1/T$ formará una constante en frecuencia (considerando el aliasing). De aquí se puede probar que $G(f)$ deberá ser simétrico vestigial respecto a $1/2T$. En todo caso, para este ejercicio en particular, de la discusión anterior se ve que el menor ancho de banda posible para $g(t)$ (y por tanto para $p(t)$, dado que $|P(f)|^2 = G(f)$) es $W > 1/2T$ y por lo tanto $1/2T < W < B_C$.
La comparación con la primera parte es que el ancho de banda se puede hacer igual de pequeño que el criterio más conservador, pero con la ventaja que aquí el ISI se puede hacer despreciable a medida que el pulso se alarga.

## Problema 2

**(a)** Debido a los pulsos elegidos (pulso con duty cycle al 50% y por lo tanto de duración $T/2$) el ancho de banda disponible debe cumplir $B_T \geq nf_s$. Es decir, tomando el criterio de medio lóbulo para el sinc de período $2/T$ (i.e. ancho de banda $1/T$), y donde $n$ símbolos binarios son generados cada $1/f_s$ segundos. Aunque en recepción seguramente genere un poco de ISI, mientras la SNR en recepción sea

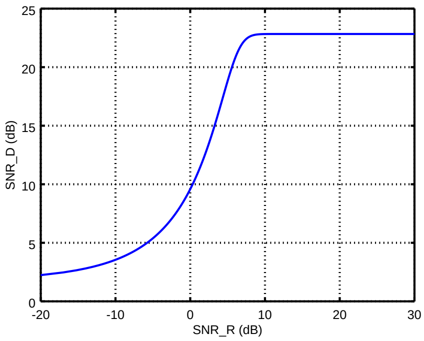


Figure 2: La curva de la $SNR_D$ en función de la $SNR_R$ para los parámetros del ejercicio.

relativamente alta esto no afectará la probabilidad de error de bit y se podrá mejorar significativamente la SNR del audio detectado, que es la prioridad según la letra. Tomando la mínima $f_s = 2W_x = 6000$ Hz se tiene $B_T \geq 2nW_x \Rightarrow n \leq \frac{B_T}{2W_x} = 3,3$. Entonces $n = 3$. Notar que si se tomaba un criterio más estricto para el ancho de banda del pulso, el resultado sería $n = 1$, con una calidad de audio muy mala.
Si se toma la máxima $f_s$, entonces $fs = \frac{B_T}{n} = 6667$ Hz.

**(b)** La probabilidad de error $P_e$ será igual a:

$$Q\left(\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_0}{2\sigma}\right)$$

Sustituyendo con los valores para este caso, nos queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A/\sqrt{L} - (-A/\sqrt{L})}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{\sqrt{L}\sigma}\right)$$

Ahora, para hallar la relación con la relación señal a ruido tenemos:

$$S_R = \frac{S_T}{L} = \frac{A^2}{2L}$$

$$N_R = 2B_R\left(\frac{N_0}{2} + \frac{N_A}{2}\right) \approx B_R N_A$$

$$SNR_R = \frac{A^2}{2LB_RN_A}$$

Notar que $S_T$ es la mitad que para el caso de codificación polar sin retorno a cero, ya que estamos trabajando con un duty cycle del 50%.
Por lo tanto, siendo $\sigma^2 = N_R$, la probabilidad de error $P_e$ será igual a:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{LB_RN_A}}\right) = Q\left(\sqrt{2SNR_R}\right)$$

**(c)** En la figura 2 se puede ver la curva en dB. La forma exacta no es tan importante, pero sí marcar donde se da el "codo" y que la $SNR_D$ cae a medida que baja la $SNR_R$.
Se trabaja en la zona donde la SNR$_D$ es constante, justo antes de que se "curve". En esta zona se tiene menor potencia de transmisión y la misma SNR$_D$ que con potencias de trasmisión mayores (sin aumentar la SNR$_D$).
Para hallar $S_T$ es necesario imponer la condición del umbral de PCM, es decir $P_e << \frac{1}{4q^2}$. Sustituyendo con el valor de $n$ la condición es $P_e < 4e^{-3}$ y despejando, se obtiene la mínima potencia de transmisión:

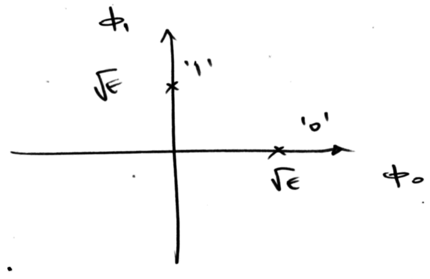


Figure 3: La constelación.

$$Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{LB_RN_A}}\right) = 4e^{-3} \rightarrow \frac{2S_T}{LB_RN_A} = 3.2^2$$

$$S_T^{min} = 10\ mW$$

**(d)** La primer observación es que poner un repetidor en la mitad del canal logrará una disminución en la probabilidad de error de decodificación en detección respecto al sistema original. Ahora bien, el sistema fue diseñado para que el ruido en detección estuviera dominado por el de cuantización, por lo que la calidad de audio final quedará incambiada con el repetidor. Es decir, la primer repuesta es no.
Por otro lado, si con la misma potencia de transmisión se logra una probabilidad de error de decodificación menor, y éste no es el término dominante de ruido en detección, entonces sí se puede disminuir la potencia de transmisión en el sistema con repetidor. Visto desde otro lado, es como trabajar más a la derecha del "codo" en la curva de $SNR_D(SNR_R)$. El ejercicio no pide realizar los cálculos de cuánto se puede disminuir, pero dado que la atenuación es exponencial en la distancia, resulta intuitivo que incluso sumando la potencia del transmisor y el repetidor, resulta en una potencia menor que el sistema original.

## Problema 3

**(a)** Dos señales son ortogonales si su producto interno es 0. En este caso resulta

$$\langle p_0, p_1\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} p_0(t)p_1(t)dt = \frac{2E}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi kt/T)\cos(2\pi(k+1)t/T)dt =$$
$$\frac{E}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(\cos(2\pi t/T) + \cos(2\pi(2k+1)t/T))dt = 0.$$

En el último paso la observación es que la integral es en un múltiplo del período de los cosenos.
La energía de la señal es la integral de su cuadrado, que en este caso vale la misma para ambas formas de onda:

$$E_{p_0} = \int |p_0(t)|^2 dt = \frac{2E}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(2\pi kt/T)dt =$$
$$\frac{E}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(1 + \cos(2\pi 2kt/T))dt = E.$$

Está claro que el valor de $k$ en este caso es cualquier entero distinto de cero, por lo que el caso de $p_1(t)$ es igual y tiene la misma energía.
Dado que son ortogonales, una base ortonormal puede ser simplemente tomar las mismos pulsos pero con $E = 1$ (es decir, la base dada por $\{\phi_0, \phi_1\}$ con, por ejemplo, $\phi_0(t) = \sqrt{2/T}\cos(2\pi kt/T)\Pi(t/T)$). En ese caso la constelación resulta el diagrama de la figura 3.

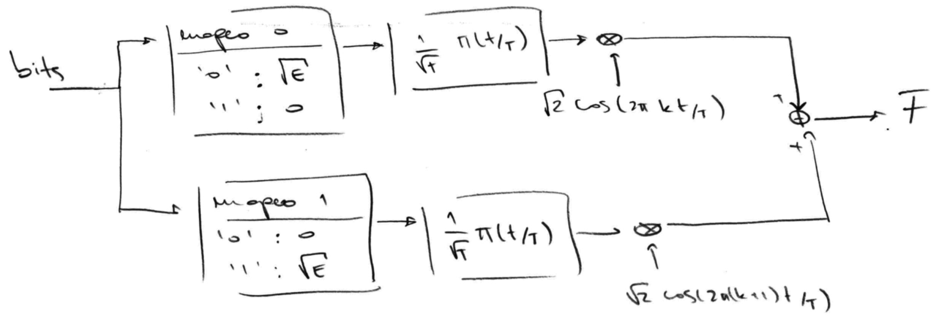


Figure 4: El transmisor.

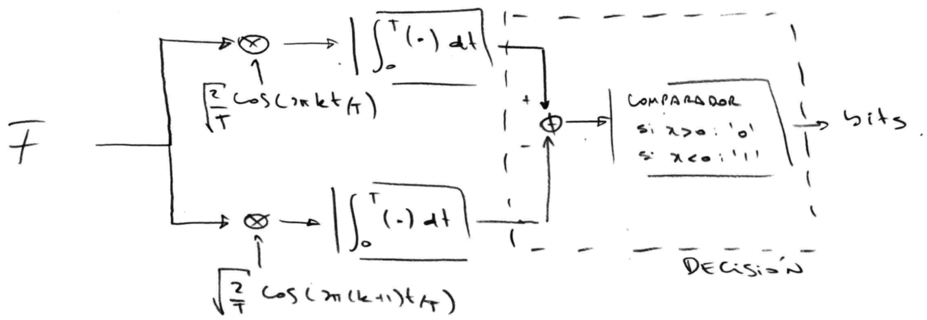


Figure 5: El receptor.

**(b)** Una posible implementación del transmisor se puede ver en la figura 4. El bloque "mapeo" genera un tren de deltas con la altura indicada en la segunda entrada de la tabla en función de qué bit entre al bloque. Se usa un filtro con respuesta impulso rectangular, seguido por la multiplicación por un oscilador con la frecuencia correspondiente. Notar que hay dos ramas, una para generar los '0's y otra para los '1's. Como alternativa válida se podría haber usado un filtro conformador con respuesta a impulso el coseno enventanado.
La potencia de transmisión es la energía media del símbolo dividido el tiempo de símbolo. En este caso la energía de símbolo es la misma para ambos, y por lo tanto:

$$P = \frac{E}{T}.$$

**(c)** Dado el que el ruido es AWGN, un receptor de correlación es óptimo. El diagrama del mismo para este caso se muestra en la figura 5. También podría haberse usado un receptor con un filtro apareado (los cosenos enventanados), y el resultado es exactamente el mismo: la proyección de la señal de entrada a los dos elementos de mi base ortonormal (los pulsos normalizados). Notar que aunque el sistema transmite en pasabanda, no hay bajada "explícita" a bandabase (al igual que en transmisión, está implícito en la forma de los pulsos).
Dado que los bits son equiprobables el bloque de decisión en este caso no tiene más que comparar ambas proyecciones y ver cuál es mayor.

**(d)** De la constelación realizada en la primera parte, es fácil ver que habrá un error cuando una normal de varianza $\sigma^2 = N_0/2$ supere la mitad de la distancia entre ambos puntos, que en este caso es igual a $\sqrt{E/2L}$ (pues el receptor diseñado no tiene amplificación para compensar la atenuación, aunque de todas formas si sí lo hubiese el resultado sería el mismo pues la varianza del ruido aumentaría de igual forma). Por lo tanto, la probabilidad de error de bit es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{LN_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{PT}{LN_0}}\right) < 10^{-3}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{PT}{LN_0}} > 3.09 \Rightarrow P > 9.55\frac{LN_0}{T}.$$

En este caso en particular, $N_0 = 2 \times 10^{-11}$ W/Hz, $T = 1/64000 = 1.56 \times 10^{-5}$ s, y la atenuación se obtiene de la fórmula dada en la letra y vale $L = 1.36 \times 10^{11}$. Por lo tanto $P > 1.6$ MW.

## Problema 4

**(a)** Por el teorema de codificación de la fuente, el largo medio mínimo (es decir, usando una codificación óptima) será siempre mayor que la entropía de la fuente (i.e. $\overline{L}_{\min} \geq H\{X\}$). En este caso, al ser una fuente discreta y sin memoria (y además equiprobables), la entropía de $X_j$ es siempre igual a 1, y la de cualquier extensión de la fuente con $n$ bits tendrá entropía igual a $n$. Por lo tanto, cualquier codificación que se intente tendrá siempre tamaño mayor a $M$, incluso tomando como super-símbolo a los $M$ bits.

**(b)** La tasa de un símbolo es la cantidad de bits de información de la fuente (en este caso $M$ bits), sobre el total de usos del canal (en este caso $3 \times M$). Por lo tanto, la tasa de este código es $R = 1/3 < C = 1/2$.

**(c)** Primero, la tasa de error en este caso es fácilmente calculable. Suponiendo que se usa votación por mayoría en recepción (es decir, si se reciben más 'A' que '-A' en recepción se decidirá que el bit era '1' y viceversa), la probabilidad de error será $1 - (3P_e(1-P_e)^2 + (1-P_e)^3)$. Lo que nos dice el segundo teorema de Shannon (o de codificación del canal) es que **existe** algún código (en este caso, mapeo del archivo original de $M$ bits a $N$ símbolos BPSK) tal que su tasa $R$ es menor que 1/2 y que consigue una probabilidad de error arbitrariamente pequeña a medida que $N$ aumenta (en este caso $R = M/N$, y por lo tanto a medida que la palabra de código crece, el tamaño del archivo se escala con $R$ para mantener esta última constante). No dice cuál es la codificación y aquí verificamos que una codificación por repetición no alcanza el límite de Shannon.