REDES DE POTENCIA

Prof. Ing. Isi HAIM

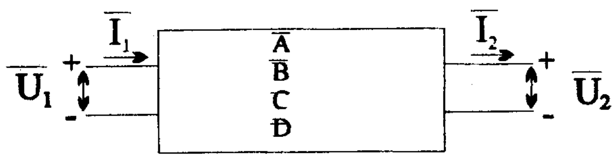
INTRODUCCION

Este trabajo consiste solamente en el establecimiento de las fórmulas básicas para el curso y en el ordenamiento de los fundamentos de las mismas. Se prefiere no asentar los aspectos conceptuales y descriptivos para poder imprimir a éstos el carácter dinámico que conviene para una correcta actualización permanente de los conocimientos transmitidos.

INDICE

CAPITULO I

Algebra de Cuadripolos de Potencia



Cuadripolo de potencia

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ - Constantes generales

$$[A]-0$$
$$[B]-\Omega$$
$$[C]-\Omega^{-1}$$
$$[D]-0$$

Cuadripolo pasivo $\overline{A}\,\overline{D}-\overline{B}\,\overline{C}=1$

Simétrico $\Leftrightarrow \overline{A}=\overline{D}$

Ecuaciones básicas:

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{U}_1 &= \overline{A}\,\overline{U}_2+\overline{B}\,\overline{I}_2\\ \overline{I}_1 &= \overline{C}\,\overline{U}_2+\overline{D}\,\overline{I}_2\end{aligned}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\overline{U}_2 &= \overline{D}\,\overline{U}_1-\overline{B}\,\overline{I}_1\\ \overline{I}_2 &= -\overline{C}\,\overline{U}_1+\overline{A}\,\overline{I}_1\end{aligned}}$$

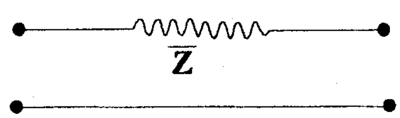
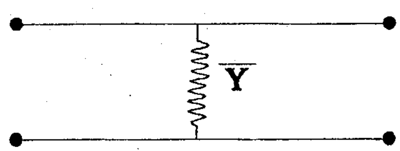
<u>Dualidad:</u> Para cambiar entrada por salida:

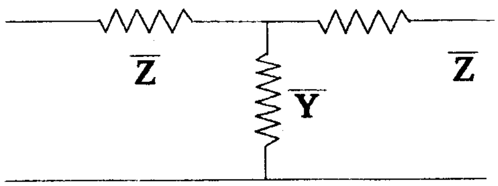
$$\overline{A} \to \overline{D}$$
$$\overline{B} \to \overline{B}$$
$$\overline{C} \to \overline{C}$$
$$\overline{D} \to \overline{A}$$
$$\overline{U}_1 \to \overline{U}_2$$
$$\overline{I}_1 \to -\overline{I}_2$$
$$\overline{U}_2 \to \overline{U}_1$$
$$\overline{I}_2 \to -\overline{I}_1$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_2 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix}$$

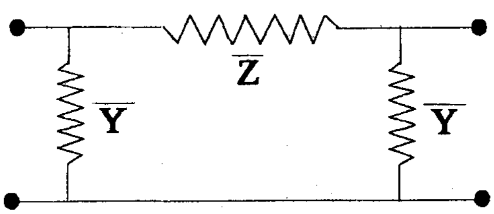
Casos particulares y combinación de cuadripolos

Esquema	Constantes generales
	$\overline{A}=1$ $\overline{B}=\overline{Z}$ $\overline{C}=0$ $\overline{D}=1$
	$\overline{A}=1$ $\overline{B}=0$ $\overline{C}=\overline{Y}$ $\overline{D}=1$

<table>
<tr>
<td>


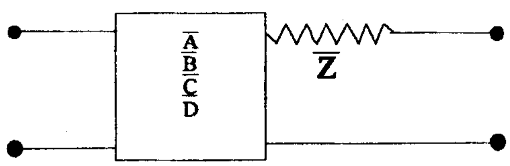
</td>
<td>

$$\overline{A} = 1 + \overline{Z}\,\overline{Y}$$
$$\overline{B} = \overline{Z}\left(2 + \overline{Z}\,\overline{Y}\right)$$
$$\overline{C} = \overline{Y}$$
$$\overline{D} = 1 + \overline{Z}\,\overline{Y}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>


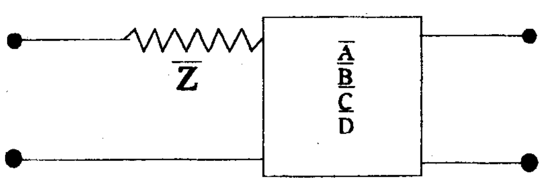
</td>
<td>

$$\overline{A} = 1 + \overline{Z}\,\overline{Y}$$
$$\overline{B} = \overline{Z}$$
$$\overline{C} = \overline{Y}\left(2 + \overline{Z}\,\overline{Y}\right)$$
$$\overline{D} = 1 + \overline{Z}\,\overline{Y}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>

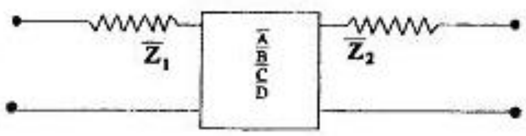
$$\overline{A}_t = \overline{A} \qquad \overline{C}_t = \overline{C}$$
$$\overline{B}_t = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{Z} \qquad \overline{D}_t = \overline{D} + \overline{C}\,\overline{Z}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>


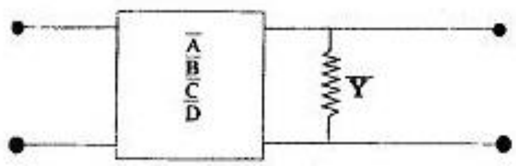
</td>
<td>

$$\overline{A}_t = \overline{A} + \overline{C}\,\overline{Z} \qquad \overline{C}_t = \overline{C}$$
$$\overline{B}_t = \overline{B} + \overline{D}\,\overline{Z} \qquad \overline{D}_t = \overline{D}$$

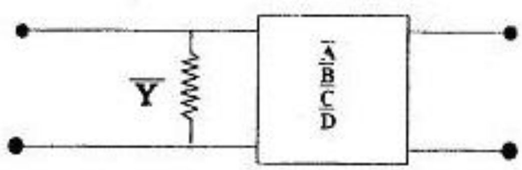
</td>
</tr>
</table>



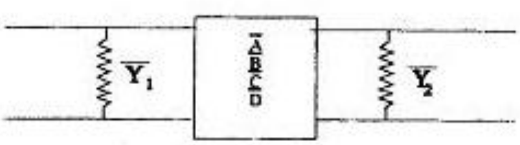
$$\overline{A}_t=\overline{A}+\overline{C}\,\overline{Z}_1$$
$$\overline{B}_t=\overline{B}+\overline{A}\,\overline{Z}_2+\overline{D}\,\overline{Z}_1+\overline{C}\,\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2$$
$$\overline{C}_t=\overline{C}$$
$$\overline{D}_t=\overline{D}+\overline{C}\,\overline{Z}_2$$



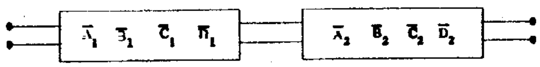
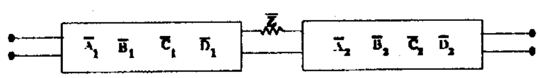
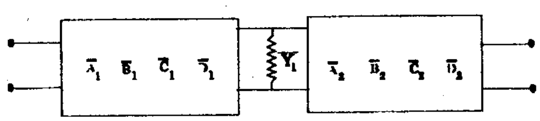
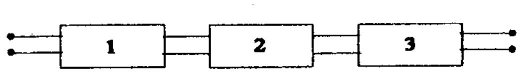
$$\overline{A}_t=\overline{A}+\overline{B}\,\overline{Y} \qquad \overline{C}_t=\overline{C}+\overline{D}\,\overline{Y}$$
$$\overline{B}_t=\overline{B} \qquad \overline{D}_t=\overline{D}$$

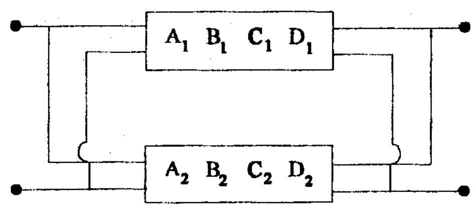


$$\overline{A}_t=\overline{A} \qquad \overline{C}_t=\overline{C}+\overline{A}\,\overline{Y}$$
$$\overline{B}_t=\overline{B} \qquad \overline{D}_t=\overline{D}+\overline{B}\,\overline{Y}$$



$$\overline{A}_t=\overline{A}+\overline{B}\,\overline{Y}_2$$
$$\overline{B}_t=\overline{B}$$
$$\overline{C}_t=\overline{C}+\overline{A}\,\overline{Y}_1+\overline{D}\,\overline{Y}_2+\overline{B}\,\overline{Y}_1\,\overline{Y}_2$$
$$\overline{D}_t=\overline{D}+\overline{B}\,\overline{Y}_1$$

	$\overline{A}_t=\overline{A}_1\,\overline{A}_2+\overline{B}_1\,\overline{C}_2$ $\overline{B}_t=\overline{A}_1\,\overline{B}_2+\overline{B}_1\,\overline{D}_2$ $\overline{C}_t=\overline{C}_1\,\overline{A}_2+\overline{D}_1\,\overline{C}_2$ $\overline{D}_t=\overline{C}_1\,\overline{B}_2+\overline{D}_1\,\overline{D}_2$
	$\overline{A}_t=\overline{A}_1\,\overline{A}_2+\overline{B}_1\,\overline{C}_2+\overline{A}_1\,\overline{C}_2\,\overline{Z}$ $\overline{B}_t=\overline{A}_1\,\overline{B}_2+\overline{B}_1\,\overline{D}_2+\overline{A}_1\,\overline{D}_2\,\overline{Z}$ $\overline{C}_t=\overline{C}_1\,\overline{A}_2+\overline{D}_1\,\overline{C}_2+\overline{C}_1\,\overline{C}_2\,\overline{Z}$ $\overline{D}_t=\overline{C}_1\,\overline{B}_2+\overline{D}_1\,\overline{D}_2+\overline{C}_1\,\overline{D}_2\,\overline{Z}$
	$\overline{A}_t=\overline{A}_1\,\overline{A}_2+\overline{B}_1\,\overline{C}_2+\overline{B}_1\,\overline{A}_2\,\overline{Y}$ $\overline{B}_t=\overline{A}_1\,\overline{B}_2+\overline{B}_1\,\overline{D}_2+\overline{B}_1\,\overline{B}_2\,\overline{Y}$ $\overline{C}_t=\overline{C}_1\,\overline{A}_2+\overline{D}_1\,\overline{C}_2+\overline{D}_1\,\overline{A}_2\,\overline{Y}$ $\overline{D}_t=\overline{C}_1\,\overline{B}_2+\overline{D}_1\,\overline{D}_2+\overline{D}_1\,\overline{B}_2\,\overline{Y}$
	$\overline{A}_t=\overline{A}_1\left(\overline{A}_2\,\overline{A}_3+\overline{B}_2\,\overline{C}_3\right)+\overline{B}_1\left(\overline{C}_2\overline{A}_3+\overline{D}_2\overline{C}_3\right)$ $\overline{B}_t=\overline{A}_1\left(\overline{A}_2\,\overline{B}_3+\overline{B}_2\,\overline{D}_3\right)+\overline{B}_1\left(\overline{C}_2\overline{B}_3+\overline{D}_2\overline{D}_3\right)$ $\overline{C}_t=\overline{C}_1\left(\overline{A}_2\,\overline{A}_3+\overline{B}_2\,\overline{C}_3\right)+\overline{D}_1\left(\overline{C}_2\overline{A}_3+\overline{D}_2\overline{C}_3\right)$ $\overline{D}_t=\overline{C}_1\left(\overline{A}_2\,\overline{B}_3+\overline{B}_2\,\overline{D}_3\right)+\overline{D}_1\left(\overline{C}_2\overline{B}_3+\overline{D}_2\overline{D}_3\right)$



$$\overline{A}_t = \frac{\overline{A}_1\,\overline{B}_2 + \overline{B}_1\,\overline{A}_2}{\overline{B}_1 + \overline{B}_2}$$

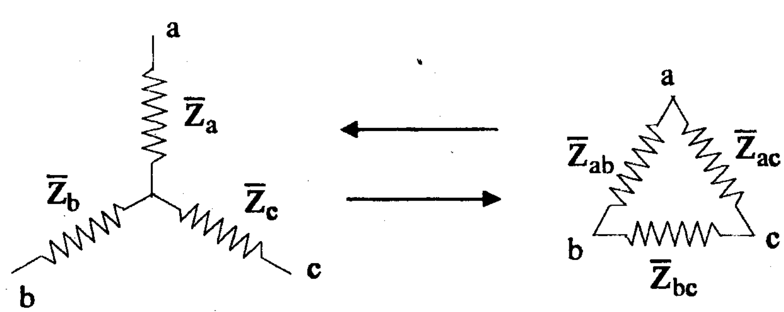
$$\overline{B}_t = \frac{\overline{B}_1\,\overline{B}_2}{\overline{B}_1 + \overline{B}_2}$$

$$\overline{C}_t = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 - \frac{\left(\overline{A}_1 - \overline{A}_2\right)\left(\overline{D}_1 - \overline{D}_2\right)}{\overline{B}_1 + \overline{B}_2}$$

$$\overline{D}_t = \frac{\overline{B}_1\,\overline{D}_2 + \overline{D}_1\,\overline{B}_2}{\overline{B}_1 + \overline{B}_2}$$

Transfiguraciones usuales

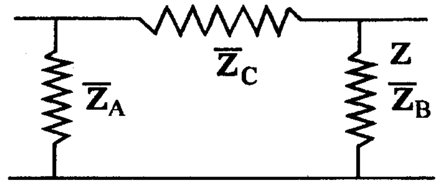
- Estrella - Triángulo:



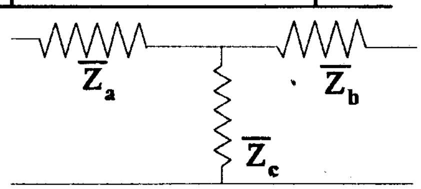
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Z}_{ab} &= \frac{\sum \overline{Z}\,\overline{Z}}{\overline{Z}_c} \\ \overline{Z}_{bc} &= \frac{\sum \overline{Z}\,\overline{Z}}{\overline{Z}_a} \\ \overline{Z}_{ca} &= \frac{\sum \overline{Z}\,\overline{Z}}{\overline{Z}_b} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \overline{Z}_a &= \frac{\overline{Z}_{ab}\overline{Z}_{ca}}{\sum \overline{Z}} \\ \overline{Z}_b &= \frac{\overline{Z}_{bc}\overline{Z}_{ab}}{\sum \overline{Z}} \\ \overline{Z}_c &= \frac{\overline{Z}_{ca}\overline{Z}_{bc}}{\sum \overline{Z}} \end{aligned}}$$

- Cuadripolos $M\!:\begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{bmatrix}$

Π:



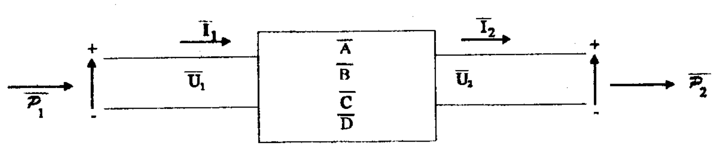
T:

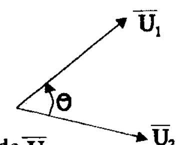


Dato \ Incognita	M	Π	T
M		$\overline{Z}_A=\dfrac{\overline{B}}{\overline{D}-1}$ $\overline{Z}_B=\dfrac{\overline{B}}{\overline{A}-1}$ $\overline{Z}_C=\overline{B}$	$\overline{Z}_a=\dfrac{\overline{A}-1}{\overline{C}}$ $\overline{Z}_b=\dfrac{\overline{D}-1}{\overline{C}}$ $\overline{Z}_c=\dfrac{1}{\overline{C}}$
Π	$\overline{A}=1+\dfrac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_B}$ $\overline{B}=\overline{Z}_C$ $\overline{C}=\dfrac{\sum\overline{Z}}{\overline{Z}_A\overline{Z}_B}$ $\overline{D}=1+\dfrac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_A}$		$\overline{Z}_a=\dfrac{\overline{Z}_A\overline{Z}_C}{\sum\overline{Z}}$ $\overline{Z}_b=\dfrac{\overline{Z}_B\overline{Z}_C}{\sum\overline{Z}}$ $\overline{Z}_c=\dfrac{\overline{Z}_A\overline{Z}_B}{\sum\overline{Z}}$
T	$\overline{A}=1+\dfrac{\overline{Z}_a}{\overline{Z}_c}$ $\overline{B}=\dfrac{\sum\overline{Z}\overline{Z}}{\overline{Z}_c}$ $\overline{C}=\dfrac{1}{\overline{Z}_c}$ $\overline{D}=1+\dfrac{\overline{Z}_b}{\overline{Z}_c}$	$\overline{Z}_A=\dfrac{\sum\overline{Z}\overline{Z}}{\overline{Z}_b}$ $\overline{Z}_B=\dfrac{\sum\overline{Z}\overline{Z}}{\overline{Z}_a}$ $\overline{Z}_C=\dfrac{\sum\overline{Z}\overline{Z}}{\overline{Z}_c}$	

CAPITULO II

Potencias Entrantes y Salientes para un Cuadripolo en Función de Tensiones Terminales y de su Defasaje





θ = adelante de $\overline{U}_1$ respecto a $\overline{U}_2$

Definición tomada para potencia aparente:

$$\overline{\mathcal{P}} = P + jQ = \overline{U}\,\hat{I}$$

(con esta convención, un receptor sélfico tiene potencia absorbida Q > 0 y un receptor capacitivo tiene potencia absorbida Q < 0; además en el cuadripolo, $\overline{\mathcal{P}}_1$ resulta entrante y $\overline{\mathcal{P}}_2$ saliente).

$$\overline{\mathcal{P}}_1 = \frac{\hat{D}}{\hat{B}}U_1^2 - \frac{U_1 U_2}{\hat{B}}\, e^{j\theta}$$

$$\overline{\mathcal{P}}_2 = -\frac{\hat{A}}{\hat{B}}U_2^2 + \frac{U_1 U_2}{\hat{B}}\, e^{-j\theta}$$

Dualidad: Para intercambiar entrada y salida

$$\bar{\mathcal{P}}_1 \to -\bar{\mathcal{P}}_2$$
$$P_1 \to -P_2$$
$$Q_1 \to -Q_2$$
$$\bar{\mathcal{P}}_2 \to -\bar{\mathcal{P}}_1$$
$$P_2 \to -P_1$$
$$Q_2 \to -Q_1$$

En forma escalar:

$$\boxed{\begin{aligned} P_1 &= \frac{D}{B}U_1^2\cos(\beta-\delta) - \frac{U_1 U_2}{B}\cos(\theta+\beta) \\ Q_1 &= \frac{D}{B}U_1^2\,\mathrm{sen}(\beta-\delta) - \frac{U_1 U_2}{B}\,\mathrm{sen}(\theta+\beta) \end{aligned}}$$

ENTRADA.

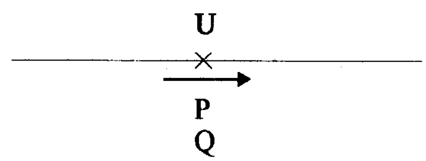
$$\boxed{\begin{aligned} P_2 &= -\frac{A}{B}U_2^2\cos(\alpha-\beta) + \frac{U_1 U_2}{B}\cos(\theta-\beta) \\ Q_2 &= \frac{A}{B}U_2^2\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta) - \frac{U_1 U_2}{B}\,\mathrm{sen}(\theta-\beta) \end{aligned}}$$

SALIDA.

CAPITULO III

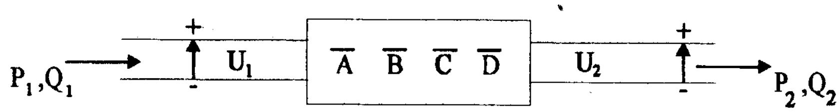
Modificación Introducida por un Cuadripolo en las Condiciones Eléctricas de un Circuito

<u>Condición eléctrica de un punto de un circuito.</u>



La definimos por la tensión U en el punto y el flujo (en determinado sentido) de potencias activa P y reactiva Q, o sea por tres magnitudes escalares (U, P, Q) (la primera respecto a un punto de referencia y las dos últimas con un sentido determinado) o bien por una magnitud escalar y una magnitud compleja $(U, \overline{\mathcal{P}})$, siendo $\overline{\mathcal{P}} = P + jQ$.

Si después del punto (en el sentido de la potencia), intercalamos un cuadripolo, modificamos la condición eléctrica, o sea que obtenemos a la salida del cuadripolo una condición eléctrica diferente de la de la entrada:



Fórmulas complejas:

"SALIDA" en función de "ENTRADA"

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{U}_2 = \overline{D}\,U_1 - \overline{B}\frac{\hat{\mathcal{P}}_1}{U_1}\\&\overline{\mathcal{P}}_2 = \hat{A}\overline{D}\,\overline{\mathcal{P}}_1 + \overline{B}\,\hat{C}\hat{\mathcal{P}}_1 - \hat{C}\overline{D}\,U_1^2 - \frac{\hat{A}\,\overline{B}}{U_1^2}\mathcal{P}_1^2\end{aligned}}$$

La fase resultante para $\overline{U}_2$ es respecto a $\overline{U}_1$, o sea que se trata de $-\theta$.

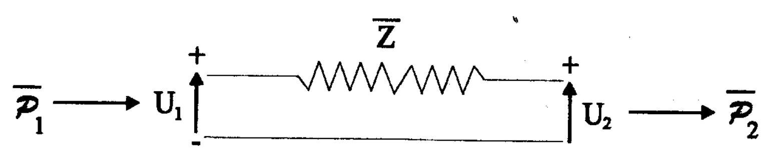
"ENTRADA" en función de "SALIDA"

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{U}_1 = \overline{A}\,U_2 + \overline{B}\frac{\hat{\mathcal{P}}_2}{U_2}\\&\overline{\mathcal{P}}_1 = \overline{A}\,\hat{D}\overline{\mathcal{P}}_2 + \overline{B}\,\hat{C}\hat{\mathcal{P}}_2 + \overline{A}\,\hat{C}\,U_2^2 + \frac{\overline{B}\,\hat{D}}{U_2^2}\mathcal{P}_2^2\end{aligned}}$$

La fase resultante para $\overline{U}_1$ es respecto a $\overline{U}_2$, o sea que se trata de θ.

Casos particulares.

1)Impedancia:



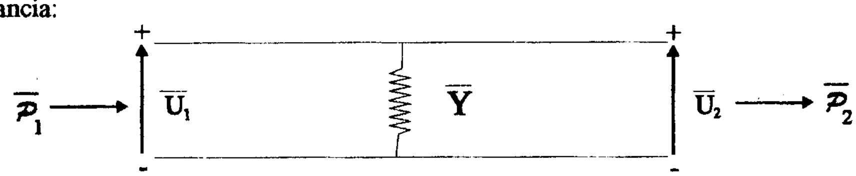
"SALIDA"en función de "ENTRADA"

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{U}_2 &= U_1 - \overline{Z}\frac{\hat{\mathcal{P}}_1}{U_1}\\ \overline{\mathcal{P}}_2 &= \overline{\mathcal{P}}_1 - \frac{\overline{Z}}{U_1^2}\mathcal{P}_1^2\end{aligned}}$$

"ENTRADA" en función de "SALIDA"

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{U}_1 &= U_2 + \overline{Z}\frac{\hat{\mathcal{P}}_2}{U_2}\\ \overline{\mathcal{P}}_1 &= \overline{\mathcal{P}}_2 + \frac{\overline{Z}}{U_2^2}\mathcal{P}_2^2\end{aligned}}$$

2) Admitancia:



"SALIDA"en función de "ENTRADA"

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{U}_2 &= U_1\\ \overline{\mathcal{P}}_2 &= \overline{\mathcal{P}}_1 - \hat{Y}\,U_1^2\end{aligned}}$$

"ENTRADA" en función de "SALIDA"

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{U}_1 &= U_2\\ \overline{\mathcal{P}}_1 &= \overline{\mathcal{P}}_2 + \hat{Y}\mathcal{P}_2^2\end{aligned}}$$

FORMULAS ESCALARES

"SALIDA" en función de "ENTRADA"

$$
\begin{aligned}
&U_2^2 = D^2U_1^2 + \frac{B^2}{U_1^2}\left(P_1^2 + Q_1^2\right) - 2BD\left[P_1\cos(\beta-\delta) + Q_1\,\mathrm{sen}(\beta-\delta)\right] \\
&P_2 = AD\left[P_1\cos(\alpha-\delta) + Q_1\,\mathrm{sen}(\alpha-\delta)\right] + BC\left[P_1\cos(\beta-\gamma) + Q_1\,\mathrm{sen}(\beta-\gamma)\right] - \\
&-CDU_1^2\cos(\delta-\gamma) - AB\frac{P_1^2 + Q_1^2}{U_1^2}\cos(\beta-\alpha) \\
&Q_2 = AD\left[P_1\,\mathrm{sen}(\delta-\alpha) + Q_1\cos(\delta-\alpha)\right] + BC\left[P_1\,\mathrm{sen}(\beta-\gamma) - Q_1\cos(\beta-\gamma)\right] - \\
&-CDU_1^2\,\mathrm{sen}(\delta-\gamma) - AB\frac{P_1^2 + Q_1^2}{U_1^2}\mathrm{sen}(\beta-\alpha)
\end{aligned}
$$

"ENTRADA" en función de "SALIDA"

$$
\begin{aligned}
&U_1^2 = A^2U_2^2 + \frac{B^2}{U_2^2}\left(P_2^2 + Q_2^2\right) + 2AB\left[P_2\cos(\beta-\alpha) + Q_2\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha)\right] \\
&P_1 = AD\left[P_2\cos(\delta-\alpha) + Q_2\,\mathrm{sen}(\delta-\alpha)\right] + BC\left[P_2\cos(\beta-\gamma) + Q_2\,\mathrm{sen}(\beta-\gamma)\right] + \\
&\quad +ACU_2^2\cos(\alpha-\gamma) + BD\frac{P_2^2 + Q_2^2}{U_2^2}\cos(\beta-\delta) \\
&Q_1 = AD\left[P_2\,\mathrm{sen}(\alpha-\delta) + Q_2\cos(\alpha-\delta)\right] + BC\left[P_2\,\mathrm{sen}(\beta-\gamma) - Q_2\cos(\beta-\gamma)\right] + \\
&\quad +ACU_2^2\,\mathrm{sen}(\alpha-\gamma) + BD\frac{P_2^2 + Q_2^2}{U_2^2}\mathrm{sen}(\beta-\delta)
\end{aligned}
$$

Casos particulares:

1) Impedancia: $\overline{Z} = Z\,e^{i\varphi}$

$$\boxed{\begin{array}{l} U_2^2 = U_1^2 + \dfrac{Z^2}{U_1^2}\left(P_1^2 + Q_1^2\right) - 2Z\left[P_1 \cos\varphi + Q_1 \operatorname{sen}\varphi\right] \\ P_2 = P_1 - Z\dfrac{P_1^2 + Q_1^2}{U_1^2}\cos\varphi \\ Q_2 = Q_1 - Z\dfrac{P_1^2 + Q_1^2}{U_1^2}\operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

"SALIDA" en función de "ENTRADA"

$$\boxed{\begin{array}{l} U_1^2 = U_2^2 + \dfrac{Z^2}{U_2^2}\left(P_2^2 + Q_2^2\right) + 2Z\left[P_2 \cos\varphi + Q_2 \operatorname{sen}\varphi\right] \\ P_1 = P_2 + Z\dfrac{P_2^2 + Q_2^2}{U_2^2}\cos\varphi \\ Q_1 = Q_2 + Z\dfrac{P_2^2 + Q_2^2}{U_2^2}\operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

"ENTRADA" en función de "SALIDA"..

2) Admitancia: $\overline{Y} = Y\,e^{i\varphi}$

"SALIDA" en función de "ENTRADA".

$$\boxed{\begin{array}{l} U_2 = U_1 \\ P_2 = P_1 - YU_1^2\cos\varphi \\ Q_2 = Q_1 + YU_1^2\operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

"ENTRADA" en función de "SALIDA"

$$\boxed{\begin{array}{l} U_1 = U_2 \\ P_1 = P_2 + YU_2^2\cos\varphi \\ Q_1 = Q_2 - YU_2^2\operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

CAPITULO IV

Lineas Largas

L = longitud de linea (km)
r = resistencia unitaria (Ω/km)
l = self. unitaria (H/km)
g = conductancia unitaria (Ω^{-1} /km), en general se desprecia.
c = capacidad unitaria (F/km)
$\bar{z}$ = impedancia unitaria (Ω/km) $= r + l\,\omega\,\mathrm{j}$ (longitudinal)
$\bar{\psi}$ = admitancia unitaria (Ω^{-1} /km)$= g + c\,\omega\,\mathrm{j}$ (transversal)

$\bar{Z} = (r + \ell\,\omega\,\mathrm{j})L = \bar{z}\,L =$ impedancia total de la línea (Ω).

$\bar{Y} = (g + c\,\omega\,\mathrm{j})L = \bar{\psi}\,L =$ admitancia total de la línea (Ω^{-1})

$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{z}\,\bar{\psi}}$ =constante de propagación (km^{-1}); se toma la determinación de componentes positivas.

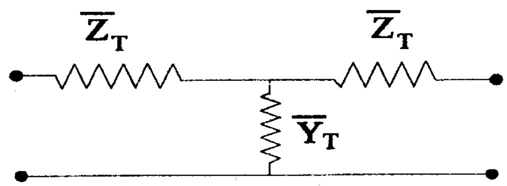
$\bar{\theta} = \sqrt{\bar{Z}\,\bar{Y}} = \sqrt{\bar{z}\,\bar{\psi}}L = \bar{\gamma}\,L$ =constante total (adimensionada)

Cuadripolo equivalente a la línea:

1) Constantes generales:

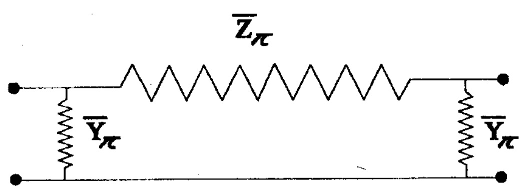
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{A} &= ch\ \bar{\theta} \\ \bar{B} &= \bar{Z}\,\frac{sh\ \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \\ \bar{C} &= \bar{Y}\,\frac{sh\ \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \\ \bar{D} &= ch\ \bar{\theta} \end{aligned}}$$

2) Esquema en T



$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{Z}_T = \overline{Z}\,\dfrac{ch\ \overline{\theta}-1}{\overline{\theta}\ sh\ \overline{\theta}} \\ \overline{Y}_T = \overline{Y}\,\dfrac{sh\ \overline{\theta}}{\overline{\theta}} \end{array}}$$

3) Esquema en π:



$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{Z}_\pi = \overline{Z}\,\dfrac{sh\ \overline{\theta}}{\overline{\theta}} \\ \overline{Y}_\pi = \overline{Y}\,\dfrac{ch\ \overline{\theta}-1}{\overline{\theta}\ sh\ \overline{\theta}} \end{array}}$$

<u>**Fórmulas a recordar:**</u>

$$\begin{cases} ch\ \overline{\theta} = ch(a+bj) = ch\,a\ \cos b + j\ sh\ a\ \ \text{sen}\ b \\ sh\ \overline{\theta} = sh(a+bj) = sh\,a\ \cos b + j\ ch\ a\ \ \text{sen}\ b \end{cases}$$

$$ch\ a = \frac{e^{a}+e^{-a}}{2} \qquad sh\ a = \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}.$$

CAPITULO V

Componentes Simétricas

Introducción

Sea un vector de tres componentes complejas.

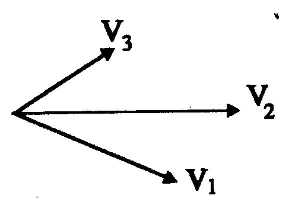
$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$$

Este vector puede tener distintas interpretaciones en un circuito trifásico, donde se tiene siempre tres componentes:

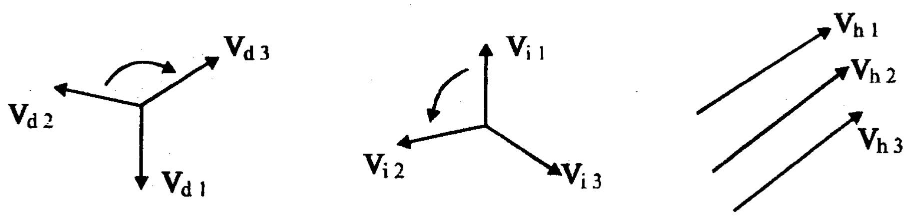
tensión en un punto del circuito respecto a un punto de referencia (que suele ser el neutro del sistema).

- tensión entre dos "puntos" del circuito (tenemos tres parejas de puntos geométricos).
- corriente en un ramal
- impedancia de un ramal
- potencia eléctrica consumida en un ramal (en cada fase del ramal se tiene una potencia compleja - activa y reactiva).
- etc.

Llamaremos a los números complejos (V_1, V_2, V_3), "componentes fásicas" del vector $\vec{V}$:



Es fácil ver que este vector se puede descomponer en la suma de tres vectores perfectos en la forma siguiente:



Vector "directo" Vector "inverso" Vector "homopolar"

El vector directo está formado por tres componentes de igual módulo, de ángulo 120° dos a dos y de secuencia horaria; el vector inverso por tres componentes de igual módulo, ángulo 120° dos a dos, secuencia anti-horaria, y el vector homopolar por tres complejos de igual módulo y en fase.

Utilizando el operador $a = e^{j120°}$ **, usamos la siguiente notación:**

$$\begin{cases} V_{d1} = V_d \\ V_{d2} = a^2 V_d \\ V_{d3} = a V_d \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{i1} = V_i \\ V_{i2} = a\, V_i \\ V_{i3} = a^2 V_i \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{h1} = V_h \\ V_{h2} = V_h \\ V_{h3} = V_h \end{cases}$$

Es obvio que el solo conocimiento de V_d, V_i, V_h **determina completamente los tres vectores perfectos.**
Tendremos:

$$\vec{V} = (V_{d1}, V_{d2}, V_{d3}) + (V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}) + (V_{h1}, V_{h2}, V_{h3})$$

de donde:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1 = V_d + V_i + V_h \\ V_2 = a^2\, V_d + a V_i + V_h \\ V_3 = a\, V_d + a^2 V_i + V_h \end{array}}$$

Conocidos (V_d, V_i, V_h) quedan determinados (V_1, V_2, V_3) y, recíprocamente dados (V_1, V_2, V_3) existen y son únicos (V_d, V_i, V_h) ya que la matriz de paso es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$, que es invertible por ser su determinante $3\left(a - a^2\right) \neq 0$.

La inversión de esta matriz nos da:

$$\boxed{\begin{aligned} V_d &= \frac{1}{3}\left(V_1 + a\,V_2 + a^2 V_3\right) \\ V_i &= \frac{1}{3}\left(V_1 + a^2\,V_2 + aV_3\right) \\ V_h &= \frac{1}{3}\left(V_1 + V_2 + V_3\right) \end{aligned}}$$

Llamando $\vec{V}_s = (V_d, V_i, V_h)$ "vector simétrico" asociado a V existe una correspondencia biunívoca entre el vector "fásico" y el vector "simétrico":

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) \leftrightarrow \vec{V}_s = (V_d, V_i, V_h)$$

Los números complejos V_d, V_i, V_h se llaman, respectivamente, componente "directa", "inversa" y "homopolar" del vector $\vec{V}$, distinguiéndolos así de sus componentes "fásicas"; también pueden notarse así:

$$\begin{cases} V_d = \left(\vec{V}\right)_d \\ V_i = \left(\vec{V}\right)_i \\ V_h = \left(\vec{V}\right)_h \end{cases}$$

Propiedades aritméticas del operador "a":

$$a = e^{j\,120°} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = e^{j\,240°} = \hat{a} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = 1$$

$$1 + a + a^2 = 0$$

$$a - a^2 = j\sqrt{3}$$

Casos particulares:

1) $\vec{V}$ directo: $\left(V_1, a^2V_1, aV_1\right) \leftrightarrow \left(V_1, 0, 0\right)$

Fásicas **Simétricas**

"Un vector directo sólo tiene componente directa"

2) $\vec{V}$ inverso: $\left(V_1, aV_1, a^2V_1\right) \leftrightarrow \left(0, V_1, 0\right)$

Fásicas **Simétricas**

"Un vector inverso sólo tiene componente inversa"

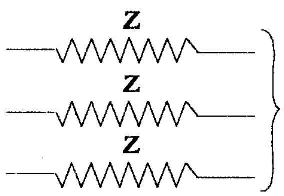
3) $\vec{V}$ homopolar: $\left(V, V, V\right) \leftrightarrow \left(0, 0, V\right)$

Fásicas **Simétricas**

"Un vector homopolar sólo tiene componente homopolar"

Ejemplos:

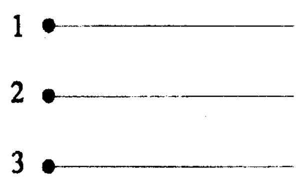
1) Tramo de un circuito equilibrado o receptor formado por tres impedancias iguales:



$(Z, Z, Z) \leftrightarrow (0,0,Z)$

Fásicas Simétricas

2) Fuente equilibrada:



$|V_1| = |V_2| = |V_3| = V$

con secuencia directa

Componentes simétricas $(V, 0, 0)$

Operaciones:

1) Suma:

Sean $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ y $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$. La suma de esos dos vectores es:

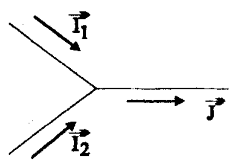
$$\vec{V} + \vec{U} = (V_1 + U_1, V_2 + U_2, V_3 + U_3)$$

Es consecuencia de la linealidad de la transformación a componentes simétricas:

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\vec{V}+\vec{U}\right)_d &= V_d + U_d\\ \left(\vec{V}+\vec{U}\right)_i &= V_i + U_i\\ \left(\vec{V}+\vec{U}\right)_h &= V_h + U_h\end{aligned}}$$

<u>Aplicación a circuitos trifásicos:</u>

a) Corrientes en un nudo:

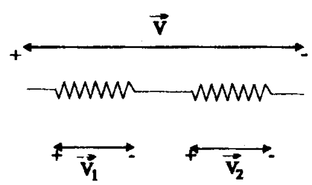


Representación unifilar del nudo.

Las componentes simétricas de $\vec{J}$ son la suma de las componentes simétricas correspondientes de $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$.

$$\vec{J} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \text{ (ley de Kirchoff)}$$

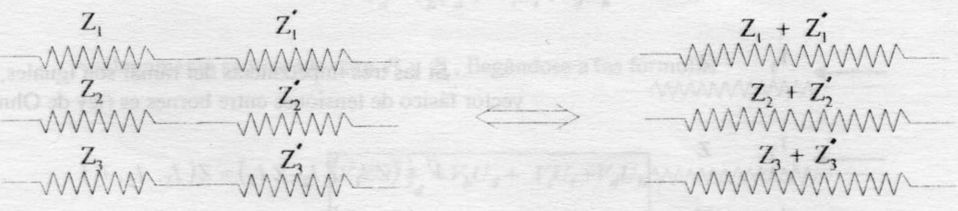
b) Tensiones de dos ramales en serie:



Representación unifilar.

Las componentes simétricas de $\vec{V}$ son la suma de las componentes simétricas correspondientes de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

c) Impedancias en serie:



Las componentes simétricas del vector fásico $(Z_1 + Z_1', Z_2 + Z_2', Z_3 + Z_3')$ son la suma de las componentes simétricas correspondientes de los vectores fásicos (Z_1, Z_2, Z_3) y (Z_1', Z_2', Z_3').

2) Producto de un número por un vector:

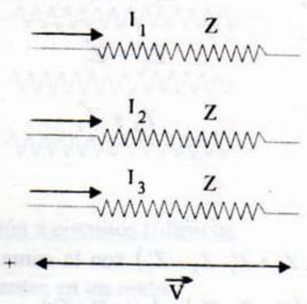
Sean el vector fásico $\vec{V} = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, V_3)$ y el número complejo α. Es consecuencia de la linealidad que las componentes del vector fásico $\alpha\vec{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, \alpha V_3)$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\alpha\vec{V}\right)_d &= \alpha V_d \\ \left(\alpha\vec{V}\right)_i &= \alpha V_i \\ \left(\alpha\vec{V}\right)_h &= \alpha V_h \end{aligned}}$$

En particular, para $\alpha = -1$:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(-\vec{V}\right)_d &= -V_d \\ \left(-\vec{V}\right)_i &= -V_i \\ \left(-\vec{V}\right)_h &= -V_h \end{aligned}}$$

Aplicación a circuitos trifásicos:



Si las tres impedancias del ramal son iguales, el vector fásico de tensiones entre bornes es (ley de Ohm):

$$\vec{V} = (Z\,I_1,\, Z\,I_2,\, Z\,I_3) = Z(\,I_1,\, I_2,\, I_3)$$

y por lo tanto sus componentes simétricas son:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_d = Z\,I_d \\ V_i = Z\,I_i \\ V_h = Z\,I_h \end{array}}$$

En caso de una impedancia perfecta, la ley de Ohm puede aplicarse en las tres secuencias en forma desacoplada.

3) Producto fásico:

Dados los vectores fásicos $\vec{V} = (V_1,\, V_2,\, V_3)$ **y** $\vec{U} = (\,U_1,\, U_2,\, U_3)$, **llamamos** **producto fásico** **de esos vectores al vector fásico:**

$$\vec{P} = \vec{V} \otimes \vec{U} = (\,V_1U_1,\, V_2\,U_2,\, V_3\,U_3)$$

obviamente conmutativo.

Queremos hallar las componentes simétricas de $\vec{P}$ **conocidas las componentes simétricas de** $\vec{V}$ y $\vec{U}$.

$$P_d = \frac{1}{3}\left(\,V_1U_1,\, a\,V_2\,U_2,\, a^2\,V_3\,U_3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\,(V_d + V_i + V_h)(U_d + U_i + U_h) + a\left(a^2 V_d + a\,V_i + V_h\right)\left(a^2 U_d + a\,U_i + U_h\right) +$$

$$+ a^2\left(aV_d + a^2\,V_i + V_h\right)\left(aU_d + a^2\,U_i + U_h\right)\Big]$$

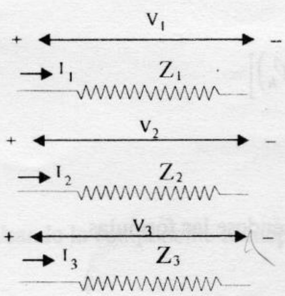
Realizando operaciones, queda:

$$P_d = V_h U_d + V_i U_i + V_d U_h$$

Análogamente se procede para P_i y P_h, llegándose a las fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\vec{V}\otimes\vec{U}\right)_d &= V_h U_d + V_i U_i + V_d U_h\\ \left(\vec{V}\otimes\vec{U}\right)_i &= V_d U_d + V_h U_i + V_i U_h\\ \left(\vec{V}\otimes\vec{U}\right)_h &= V_i U_d + V_d U_i + V_h U_h\end{aligned}}$$

<u>Aplicación a la ley de Ohm en componentes simétricas:</u>



$$\begin{cases} V_1 = Z_1 I_1 \\ V_2 = Z_2 I_2 \Rightarrow \vec{V} = \vec{Z}\otimes\vec{I} \\ V_3 = Z_3 I_3 \end{cases}$$

Por las fórmulas anteriores:

$$\boxed{\begin{aligned} V_d &= Z_h I_d + Z_i I_i + Z_d I_h\\ V_i &= Z_d I_d + Z_h I_i + Z_i I_h\\ V_h &= Z_i I_d + Z_d I_i + Z_h I_h\end{aligned}}$$

Vemos que en el caso de impedancias desequilibradas, la ley de Ohm ya no se aplica en forma desacoplada en las tres secuencias.

4) <u>Conjugación</u>

Dado el vector fásico $\vec{V} = (V_1,\ V_2,\ V_3)$, llamamos "conjugado de $\vec{V}$" al vector fásico:

$$\hat{\vec{V}} = \left(\hat{V}_1,\ \hat{V}_2,\ \hat{V}_3\right)$$

Vamos a hallar las componentes simétricas de $\hat{\vec{V}}$ conocidas las de $\vec{V}$

$$\left(\hat{V}\right)_d = \frac{1}{3}\left(\hat{V}_1, a\,\hat{V}_2, a^2\,\hat{V}_3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\widehat{(V_d + V_i + V_h)} + a\,\widehat{\left(a^2 V_d + a\,V_i + V_h\right)} + a^2\,\widehat{\left(a\,V_d + a^2\ V_i + V_h\right)}\right] =$$

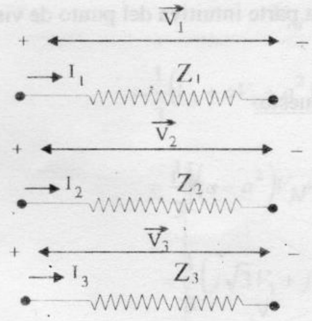
$$= \frac{1}{3}\left[\left(\hat{V}_d + \hat{V}_i + \hat{V}_h\right) + a\left(a\hat{V}_d + a^2\ \hat{V}_i + \hat{V}_h\right) + a^2\left(a^2\,\hat{V}_d + a\hat{V}_i + \hat{V}_h\right)\right] =$$

$$= \hat{V}_i$$

Análogamente se hallan las otras componentes, obteniéndose las fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\hat{\vec{V}}\right)_d &= \hat{V}_i \\ \left(\vec{V}\right)_i &= \hat{V}_d \\ \left(\hat{\vec{V}}\right)_h &= \hat{V}_h \end{aligned}}$$

<u>Aplicación:</u> **Potencia total consumida en un ramal desequilibrado.**



La potencia eléctrica total consumida en este ramal es el escalar complejo:

$$\mathcal{P} = V_1\hat{I}_1 + V_2\hat{I}_2 + V_3\hat{I}_3$$

Se trata de la suma de las componentes fásicas del vector:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{V} \otimes \hat{\vec{I}} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$$

o sea que:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = 3\mathcal{P}_h$$

Usando la componente homopolar $\mathcal{P}_h$ del vector $\vec{V} \otimes \hat{\vec{I}}$, obtenemos:

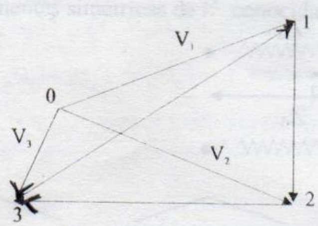
$$\mathcal{P} = 3\left[V_i\left(\hat{\vec{I}}\right)_d + V_d\left(\hat{\vec{I}}\right)_i + V_h\left(\hat{\vec{I}}\right)_h\right]$$

De acuerdo al resultado anterior:

$\mathcal{P} =$	$3V_d\hat{I}_d$	$+$	$3V_i\hat{I}_i$	$+ 3V_h\hat{I}_h$
	Potencia eléctrica total consumida en la red trifásica directa		**idem en la red inversa**	**idem en la red homopolar**

Del punto de vista de la potencia eléctrica total consumida en el ramal, se puede considerar las tres redes desacopladas, calcular la potencia eléctrica total consumida en cada red de secuencia y sumar los tres resultados. Esta conclusión es por otra parte intuitiva del punto de vista físico.

3)Pasaje de un sistema estrellado a un sistema compuesto:



Sistema estrellado:

$$\vec{V}_e = \quad (V_1, V_2, V_3) \quad \leftrightarrow \quad (V_{ed}, V_{ei}, V_{eh})$$

Componentes físicas — Componentes simétricas

Sistema compuesto:

$$\vec{V}_c = \quad (V_3 - V_2, V_1 - V_3, V_2 - V_1) \quad \leftrightarrow \quad (V_{cd}, V_{ci}, V_{ch})$$

Componentes físicas — Componentes simétricas

Se trata de hallar las componentes simétricas de $\vec{V}_c$ conocidas las de $\vec{V}_e$. Puede escribirse:

$$\vec{V}_o = \underset{\vec{V}}{\underset{\downarrow}{(V_3, V_1, V_2)}} - \underset{\vec{U}}{\underset{\downarrow}{(V_2, V_3, V_1)}}$$

Entonces

$$V_{cd} = V_d - U_d =$$

$$= \frac{1}{3}\left(V_3 + aV_1 + a^2 V_2\right) - \frac{1}{3}\left(V_2 + aV_3 + a^2 V_1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(a - a^2\right)V_1 + \left(a^2 - 1\right)V_2 + (1-a)V_3\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(j\sqrt{3}V_1 + j\sqrt{3}\; aV_2 + j\sqrt{3}\; a^2 V_3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\, j\sqrt{3}\left(V_1 + aV_2 + a^2 V_3\right)$$

Nos queda:

$$V_{cd} = j\sqrt{3}\; V_{ed}$$

Procediendo análogamente para las otras componentes, se obtienen las fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} V_{cd} &= j\sqrt{3}\; V_{ed} \\ V_{ci} &= -j\sqrt{3}\; V_{ei} \\ V_{ch} &= 0 \end{aligned}}$$

El tercer resultado es previsible pues se trata de la componente homopolar de un vector cuya suma de componentes físicas es nula.

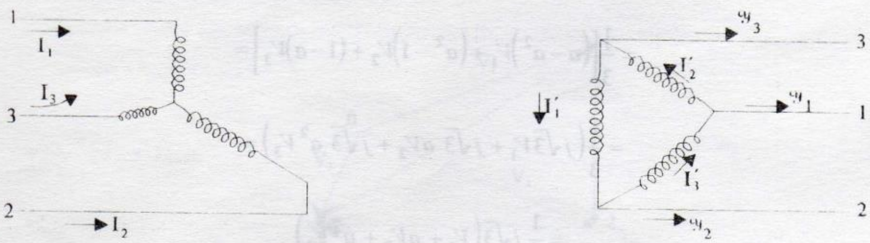
Aplicación:

Pasaje de componentes simétricas de corrientes a través de un transformador: λ/Δ

Sea un transformador de relación de transformación R (primario/secundario), con conexión λ/Δ (el neutro de la estrella primaria puede estar eventualmente a tierra).

Siendo K la relación de espiras, se tiene $R = K\sqrt{3}$.

Cuando las corrientes que penetran al primario son equilibradas, las que salen del secundario se obtienen multiplicando ésas por R; cuando son desequilibradas, o sea cuando tienen, además de la componente directa, una componente inversa (la homopolar es nula si el neutro está aislado o, si el neutro está a tierra, no sale del triángulo), se trata de ver cómo se transfieren las componentes simétricas de esas corrientes al secundario:



El vector de corrientes de línea en el primario es:

$$\bar{I} = (I_1, I_2, I_3)$$

Mientras que el vector de corrientes de línea que salen en el secundario es:

$$\bar{\mathcal{Y}} = (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3)$$

Pero

$$\mathcal{Y}_1 = I'_3 - I'_2 = K\,I_3 - K\,I_2 = K(I_3 - I_2)$$
$$\mathcal{Y}_2 = I'_1 - I'_3 = K\,I_1 - K\,I_3 = K(I_1 - I_3)$$
$$\mathcal{Y}_3 = I'_2 - I'_1 = K\,I_2 - K\,I_1 = K(I_2 - I_1)$$

Entonces

$$\bar{\mathcal{Y}} = K\underbrace{(I_3 - I_2, I_1 - I_3, I_2 - I_1)}_{\bar{I}_c}$$

Pero $\bar{I}_c$ es el vector "compuesto" correspondiente al "estrellado" $\bar{I}$ de modo que:

$$\begin{cases} I_{cd} = j\sqrt{3}\, I_d \\ I_{ci} = -j\sqrt{3}\, I_i \\ I_{ch} = 0 \end{cases}$$

Entonces, por una operación vista y recordando que $K\sqrt{3} = R$

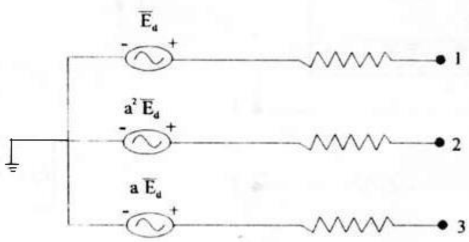
$$\begin{cases} \mathcal{Y}_d = j\,R\, I_d \\ \mathcal{Y}_i = -j\,R\, I_i \\ \mathcal{Y}_h = 0 \end{cases}$$

Este resultado muestra que para obtener las componentes simétricas en el secundario a partir de las corrientes primarias, deben utilizarse, además de la relación de transformación R, los factores multiplicativos $j, -j, 0$ respectivamente para las tres secuencias. Podemos imprimir un giro simultáneo a las tres componentes (cambiamos el origen de fases, pero no olvidar el giro adicional que crea el tipo de conección del transformador), multiplicándolas por $-j$, resultando los factores $\boxed{1, -1, 0}$, que son de aplicación más práctica.

CAPÍTULO VI

Defectos de corto-circuito

<u>Generador de Thevenin en serie con impedancia de Thevenin</u>



$(\bar E_d \;\; 0 \;\; 0)$ componentes simétricas de la f.e.m. del generador (estrelladas).

$(\bar Z_S \;\; Z_a \;\; Z_o)$ impedancias ~~secuencias~~ secuenciales o sensibles de la impedancia de Thevenin (supuesta equilibrada)

$(\bar U_1 \;\; \bar U_2 \;\; \bar U_3)$ componentes fásicas de la tensión en bornes (después de la impedancia de Thevenin)

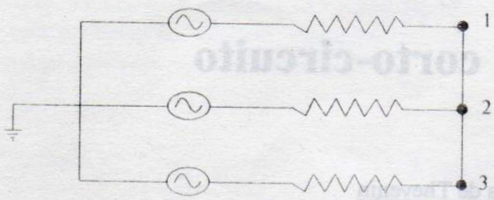
$(\bar U_d, \; \bar U_i, \; \bar U_h)$ componentes simétricas de la tensión en bornes.

$(\bar I_1 \;\; I_2 \;\; I_3)$: componentes fásicas de la corriente del generador.

$(I_d \;\; I_i \;\; I_h)$ componentes simétricas de la misma corriente.

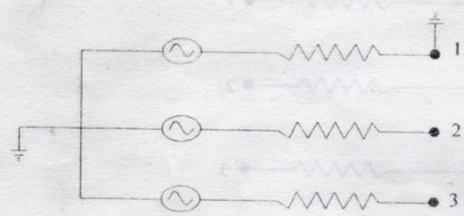
Punto de referencia para todas las tensiones: neutro del generador, supuesto a tierra; si estuviese aislado, sería $\bar Z_0 = \infty$

1)Corto-circuito 3F:



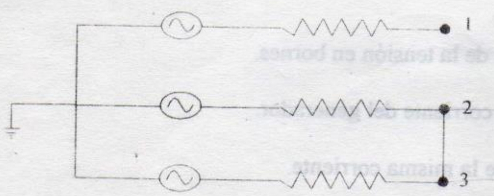
$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{I}_d = \dfrac{\bar{E}_d}{\bar{Z}_s} \\ \bar{I}_i = \bar{I}_h = 0\end{array}}$$

2)Corto-circuito 1FT:



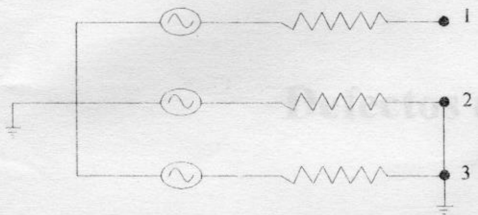
$$\boxed{\bar{I}_d = \bar{I}_i = \bar{I}_h = \frac{\bar{E}_d}{\bar{Z}_s + \bar{Z}_a + \bar{Z}_o}}$$

3)Corto-circuito 2r:



$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{I}_d = \dfrac{\bar{E}_d}{\bar{Z}_s + \bar{Z}_a} \\ \bar{I}_i = -\dfrac{\bar{E}_d}{\bar{Z}_s + \bar{Z}_a} \\ \bar{I}_h = 0\end{array}}$$

4)Corto-circuito 2FT:



$$\bar{I}_d = \frac{\bar{Z}_a + \bar{Z}_o}{\bar{Z}_s\bar{Z}_a + \bar{Z}_a\bar{Z}_o + \bar{Z}_o\bar{Z}_s}\ \bar{E}_d$$

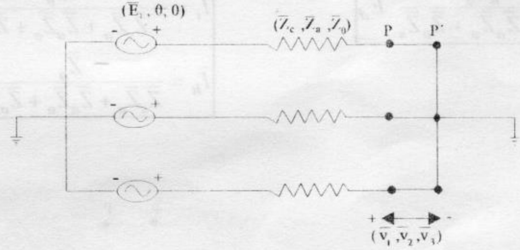
$$\bar{I}_i = -\frac{\bar{Z}_o}{\bar{Z}_s\bar{Z}_a + \bar{Z}_a\bar{Z}_o + \bar{Z}_o\bar{Z}_s}\ \bar{E}_d$$

$$\bar{I}_h = -\frac{\bar{Z}_a}{\bar{Z}_s\bar{Z}_a + \bar{Z}_a\bar{Z}_o + \bar{Z}_o\bar{Z}_s}\ \bar{E}_d$$

CAPITULO VII

Defectos de linea abierta

<u>Generador de Norton en serie con impedancia propia de Norton.</u>



$\left(\overline{E}_d, 0, 0\right)$: componentes simétricas de la f.e.m del generador (estrellada).

$\left(\overline{Z}_e, \overline{Z}_a, \overline{Z}_o\right)$:impedancis secuenciales o sensibles (equilibradas).

$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$:componentes fásicas de la tensión entre P y P'.

$\left(\overline{V}_d, \overline{V}_i, \overline{V}_h\right)$:componentes simétricas de la tensión entre P y P'.

$\left(\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3\right)$: componentes fásicas de las corrientes en el generador.

$\left(\overline{I}_d, \overline{I}_i, \overline{I}_h\right)$: componentes simétricas de las mismas corrientes.

1) Defecto 1HA:

$$\boxed{\overline{v}_1 = \frac{3\overline{Z}_a\overline{Z}_o}{\overline{Z}_s\overline{Z}_a + \overline{Z}_a\overline{Z}_o + \overline{Z}_o\overline{Z}_s}\,\overline{E}_d}$$

$$\overline{I}_d = \frac{\overline{Z}_a + \overline{Z}_o}{\overline{Z}_s\overline{Z}_a + \overline{Z}_a\overline{Z}_o + \overline{Z}_o\overline{Z}_s}\,\overline{E}_d$$

$$\overline{I}_i = -\frac{\overline{Z}_o}{\overline{Z}_s\overline{Z}_a + \overline{Z}_a\overline{Z}_o + \overline{Z}_o\overline{Z}_s}\,\overline{E}_d$$

$$\overline{I}_h = \frac{-\overline{Z}_a}{\overline{Z}_s\overline{Z}_a + \overline{Z}_a\overline{Z}_o + \overline{Z}_o\overline{Z}_s}\,\overline{E}_d$$

2)Defecto 2HA:

$$\overline{v}_d = \frac{\overline{Z}_a + \overline{Z}_o}{\overline{Z}_s + \overline{Z}_a + \overline{Z}_o}\,\overline{E}_d$$

$$\overline{v}_i = -\frac{\overline{Z}_a}{\overline{Z}_s + \overline{Z}_a + \overline{Z}_o}\,\overline{E}_d$$

$$\overline{v}_h = -\frac{\overline{Z}_o}{\overline{Z}_s + \overline{Z}_a + \overline{Z}_o}\,\overline{E}_d$$

$$\boxed{\overline{I}_d = \overline{I}_i = \overline{I}_h = \frac{\overline{E}_d}{\overline{Z}_s + \overline{Z}_a + \overline{Z}_o}}$$