Series de tiempo

Repaso: Procesos Estacionarios

Estacionariedad

- la distribución no cambia a lo largo del tiempo
- Esto es estacionariedad estricta
- Un proceso es débilmente estacionario si su media y función de autocovarianza no cambian en el tiempo.

Estacionariedad débil

- La autocovarianza depende solo de la diferencia de tiempo (lag) entre los dos puntos involucrados

$$\mu_t = \mu, \quad \sigma_t^2 = \sigma^2$$

Y

$$\gamma_{t_1,t_2} = \mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \mathrm{Cov}(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau})$$

$$= \gamma_{t_1+\tau, t_2+\tau} \equiv \gamma_{t_1-t_2}$$

Autocorrelación

- Es útil estandarizar la función de autcovarianza (acvf)
- En el caso estacionario:
- Se utiliza la función de autocorrelación (acf)

$$\rho_t = \frac{\gamma_t}{\gamma_0}$$

Autocorrelación

- Más de un proceso pueden tener la misma función acf
- Algunas propiedades:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_t = \rho_{-t}$$

$$|\rho_t| \leq 1$$

Ruido blanco

- Es un proceso estocástico, formado por una secuencia de variables aleatorias i.i.d.
- Tiene media y varianza constante
- Además:

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) = 0, \quad \mathrm{k} \neq 0$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Caminata aleatoria

- Sea {Zt} un proceso de ruido blanco
- {Xt} es una caminata aleatoria si:

$$X_o = 0$$

$$X_t = X_{t-1} + Z_t = \sum_{k=0}^{t} Z_t$$

Caminata aleatoria

- La caminata aleatoria no es estacionaria

$$\mathrm{E}(X_t) = t\mu, \quad \mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$$

- Sin embargo, el proceso de diferencias es estacionario:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = Z_t$$

Descomposición de Wold

Idea:Para todo proceso estocástico débilmente estacionario (covarianza), y “puramente no-determinístico”, luego de sustraerle la media puede ser representado de la siguiene forma. (Puramente no-determinístico significa que todas las componentes aditivas determinísticas le fueron sustraídas previamente a la serie de tiempo.)

$$x_t - \mu_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j} \quad \text{with} \quad \psi_0 = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

$$E[u_t] = 0 \quad \text{and} \quad E[u_t u_s] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{for} \quad t = s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Procesos Autorregresivos

Procesos autorregresivos

- $\{Z_t\}$ ruido blanco con media cero y s.d. σ_z
- El proceso aurtorregresivo de orden *p* AR(p) es

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots \alpha_p X_{t-p} + Z_t$$

Procesos autorregresivos

- El proceso de primer orden es

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$$

Veremos que asumiendo que $|\alpha|<1$ puede escribirse según la descomposición de Wold con infinitos parámetros.

Se puede escribir : $(1 – B\alpha)X_t = Z_t$

- Donde se utiliza el operador de retardo B

$$B^j X_t = X_{t-j}$$

Procesos autorregresivos

- De la ecuación anterior se tiene que:

$$
\begin{aligned}
X_t &= Z_t \,/\, (1-\alpha B) \\
&= (1+\alpha B+\alpha^2 B^2+\ldots)Z_t \\
&= Z_t+\alpha Z_{t-1}+\alpha^2 Z_{t-2}+\ldots
\end{aligned}
$$

Procesos autorregresivos

- $E(X_t) = 0$, y si $|\alpha|<1$

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma_X^2 = \sigma_Z^2 / (1-\alpha^2)$$

$$\gamma_k = \alpha^k \sigma_Z^2 / (1-\alpha^2)$$

$$\rho_k = \alpha^{|k|}$$

Procesos autorregresivos

- El proceso AR(p) puede escribirse como:

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots \alpha_p B^p) X_t = Z_t$$

or

$$X_t = Z_t / (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots \alpha_p B^p) = f(B) Z_t$$

Procesos autorregresivos

- Esto es

$$f(B) = (1 - \alpha_1 B - \ldots - \alpha_p B^p)^{-1}$$

$$= (1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots)$$

- para algún β_1, β_2, . . .
- Esto da Xt como un proceso MA de orden infinito, y por tanto tiene media cero

Procesos autorregresivos

- Se requieren condiciones para asegurar qe las series convergen, y por tanto la varianza existe, y la autocovarianza puede ser definidas y el sistema ser estacionario.
- El requerimiento básico es los β_i decaigan lo suficientemente rápido para valores grandes de i.

Procesos autorregresivos

- Una alternativa es trabajar con los α_i
- La condición es que las raíces de la ecuación

$$\phi(B) = 1 - \alpha_1 B - \ldots - \alpha_p B^p = 0$$

se encuentren fuera del círculo unitario.

Procesos MA:
Moving Average

Moving average- procesos MA

- Sea $\{Z_t\}$ ruido blanco con media cero y , desviación estándar σ_Z
- $\{X_t\}$ es un proceso MA(q) de orden q si para algún conjunto de constantes β_0, β_1, . . . β_q se tiene

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \ldots \beta_q Z_{t-q}$$

- Habitualmente $\beta_0 = 1$

Moving average

- La media y varianza son:

$$\mathrm{E}(X_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(X_t) = \sigma_Z^2 \sum_{k=0}^{q} \beta_k^2$$

- Este proceso es débilmente estacionario.

Moving average

- Si las Zt son gaussianas también lo es el proceso, y en ese caso es estrictamente estacionario
- La autocorrelación es

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} \Big/ \sum_{i=0}^{q} \beta_i^2 & k=1,\dots,q \\ 0 & k>q \\ \rho_{-k} & k<0 \end{cases}$$

Moving average

- Notar que la autorrelación se corta en q
- Para procesos MA(1) con $\beta_0 = 1$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \beta_1 / (1 + \beta_1{}^2) & k = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Estimación del parámetro

Si de alguna manera pudiéramos conocer o estimar $\rho_{1,}$ ¿cuál es el parámetro β_1 del proceso MA(1)? Es una ecuación cuadrática tiene dos soluciones pero solo una de ellas admite una representación como proceso autoregresivo. Esta viene de la que cumple la condición de invertibilidad,

Moving average

- Condición de invertibilidad $Z_t = f(X_t)$
- Esto asegura que si se escribe como una serie, la serie converge.
- En el caso MA(1) $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, la condición es $|\theta| < 1$

Moving average

- Se utiliza el operador de retardo B

$$B^j X_t = X_{t-j}$$

- Entonces el proceso MA(q) se puede escribir

$$X_t = (\beta_0 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots \beta_q B^q) Z_t = \theta(B) Z_t$$

Moving average

- La condición general de invertibilidad es que todas las raíces de $\theta(B)$ se encuentren fuera del círculo unitario.

Procesos ARMA

- Combinan procesos AR y MA
- Un proceso ARMA de orden (p,q) viene dado por

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots \alpha_p X_{t-p}$$

$$+ Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \dots \beta_p Z_{t-q}$$

Procesos ARMA

- Se pueden escribir también usando el operador de Shift

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

donde

$$\phi(B) = 1 - \alpha_1 B - \ldots - \alpha_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \beta_1 B + \ldots + \beta_q B^q$$

Procesos ARMA

- Un proceso ARMA puede ser escrito como procesos puros MA o AR, pudiendo quedar los operadores de orden infinito:

$$X_t = \psi(B)Z_t$$

$$\pi(B)X_t = Z_t$$

- Usualmente la forma mixta requiere menos parámetros

Procesos ARIMA

- Significan: auto regressive integrated moving average processes
- Cuando se diferencia d veces,el proceso se convierte en un proceso ARMA.
- Llamaremos al proceso diferenciado Wt. Wt es ARMA y

$$W_t = \nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

Procesos ARIMA

- Se puede especificar también:

$$\phi(B)W_t = \theta(B)Z_t$$

or

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)Z_t$$

- Este es un proceso ARIMA de orden (p,d,q)

Procesos ARIMA

- El modelo ARIMA Xt es NO ESTACIONARIO porque el operador AR del lado izquierdo tiene d raíces sobre el círculo unitario
- d es en general 1
- La caminata aleatoria es ARIMA(0,1,0)

Media no nula

- Hemos asumido que la media es cero en los procesos ARIMA
- Esto se puede corregir
  - Corregir con la media todos los términos de Wt
  - Incorporar un término constante en el modelo.

SARIMA

Season = (estación)

$$\Phi_P(B^s)x_t = \Theta_Q(B^s)z_t$$

$$\Phi_P(B^s)\varphi(B)\nabla_s^D\nabla^d x_t = \alpha + \Theta_Q(B^s)\theta_q(B)z_t$$

$$\text{ARIMA}(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$$

$$(1-B^{12})(1-B)x_t = (1+\Theta B)(1+\theta B)z_t$$

Primero se aplican los operadores diferenciales, y luego se busca un modelo para la parte "estacionaria"

Modelado y predicción procesos ARIMA

Modelado y predicción

- El proceso tiene tres etapas:
  - Identificación del modelo
  - Ajuste del modelo
  - Chequeo del modelo
- Si el último paso revela que el modelo no es correcto se repiten los pasos anteriores

Modelos

- Los modelos a ajustar son de tipo ARIMA
- La principal herramienta utilizada para identificar el procesos son las muestras de la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

Autocorrelación parcial

- Informalmente mide la correlación entre dos variables separadas k cuando se "neutraliza" la dependencia creada por las variables intermedias entre ambas.

Sea Y_t e Y_{t+k} dos v.a. La autocorrelación parcial viene dada por:

$$Corr(Y_{t,}\ Y_{t+k} \mid Y_{t+1}\, Y_{t+2}\ \ldots\ldots Y_{t+k-1})$$

Identificación del modelo

- Graficar las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para la serie de tiempos.
- Se usarán estos gráficos para identificar el modelo
- Consideremos el caso estacionario primero.

Series estacionarias

- Para procesos MA(q) la autocorrelación es cero para lags mayores que q, y la autocorrelación parcial decae de manera exponencial.
- Para un AR(p) la autocorrelación parcial es cero para lags mayores que p, y la autocorrelación tiende a cero de forma exponencial.

Series estacionarias

- Para procesos ARMA mixtos, tanto la acf como pacf tienen valores importantes hasta q y p, y luego decaen a cero exponencialmente.
- Lo que se hace es con estos criterios ajustar un modelo y ver los residuos.

Series no estacionarias

- La existencia de no-estacionariedad es indicada por una acf que toma valores importantes para lags largos.
- La idea es “estacionarizar” la serie realizando diferencias
- Con una o dos veces es normalmente suficiente.

Estimación

- Se trata de ajustar los parámetros de los modelos identificados.
- Los modelos AR pueden ser ajustados utilizando mínimos cuadrados.
- MA y ARMA requieren algoritmos iterativos para ajustar sus parámetros.

Chequeo del modelo

- Basado en residuos
- Los residuos deberían tener distribución normal, con media cero y varianza “pequeña”.