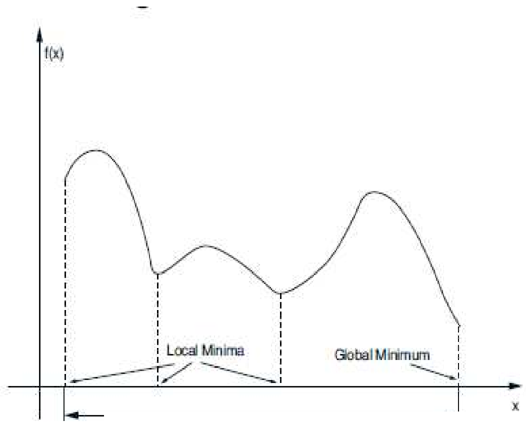
Optimización con restricciones

Optimización sobre un conjunto convexo

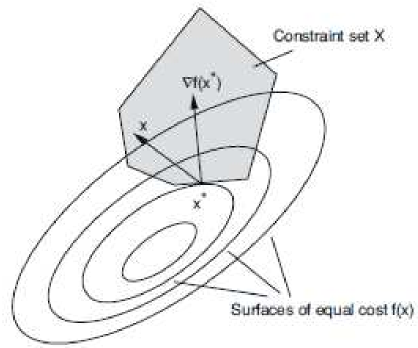
$$\min_{x \in X} f(x)$$

$f : \Re^n \to \Re$ es una función continua y diferenciable de n variables

$X \in \Re^n$ es un subconjunto de $\Re^n$ no vacío, convexo y cerrado.



Si además f es convexa un mínimo local es también global

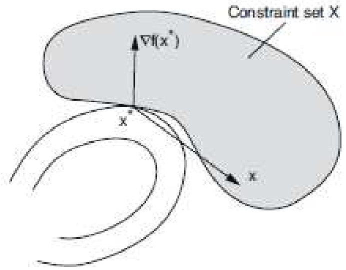


Condición de optimalidad

a) Si x* es un mínimo local de f sobre X, entonces

$$\nabla(f(x^*))'(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

b) Si f es convexa sobre X esta condición es también suficiente para minimizar f sobre X.



Ejemplos

1.Optimización sobre un octante positivo

$$X = \{x \mid x \geq 0\}$$

2. Optimización sobre un simplex

$$\min f(x)$$

$$X = \left\{ x \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = r \right\}$$

$r > 0$ un escalar dado.

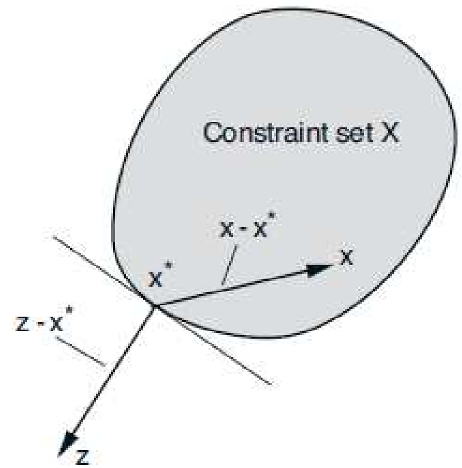
Proyección sobre un convexo

Sea $z \in \Re^n$ y sea un conjunto convexo cerrado X

Problema:

minimizar $f(x) = \|z - x\|^2$

sujeto a $x \in X$



Teorema

Este problema tiene una solución única $[z]^+$ (proyección de z).

Si X es un subespacio, $z - x^* \perp X$

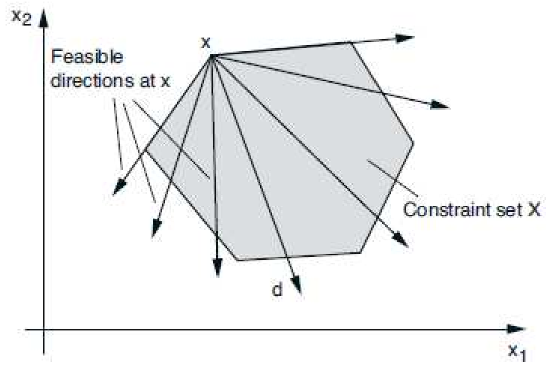
La función $f : \Re^n \rightarrow X$ definida por $f(x) = [x]^+$ es un mapeo continuo y no expansivo

es decir, $\left\| [x]^+ - [y]^+ \right\| \leq \|y - x\| \qquad \forall x, y \in \Re^n$

Métodos de optimización: Métodos sobre direcciones factibles

- Una dirección factible en un punto $x \in X$ es un vector *d* no nulo tal que $x + \alpha d$ es un punto factible para todo α positivo suficientemente pequeño.
- Un método de dirección factible

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \alpha_k d_k$$



donde d_k es una dirección factible

$\nabla f(x)' d_k < 0$, $\alpha_k > 0$ y $x_{k+1} \in X$

Se puede probar convergencia similar al método del gradiente

Método de direcciones factibles

- Definición alternativa

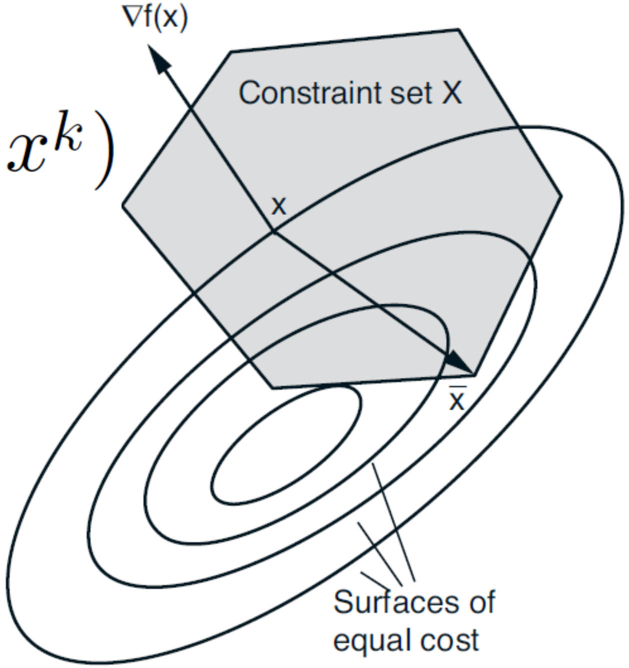
$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k(\overline{x}^k - x^k)$$

$$\overline{x}^k \in X, \qquad \nabla f(x^k)'(\overline{x}^k - x^k) < 0$$

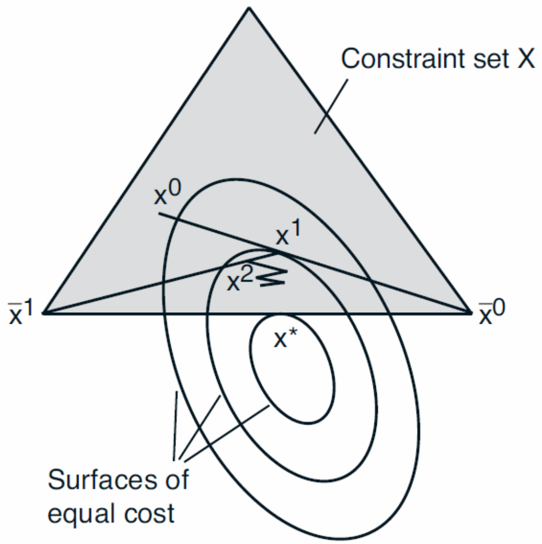
Método del gradiente condicional

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k(\overline{x}^k - x^k)$$

Donde, $\overline{x}^k = \arg\min_{x \in X} \nabla f(x^k)'(x - x^k)$



Ejemplo: optimización sobre un simplex.



Método de proyección del gradiente

- Estos métodos determinan la dirección factible de la siguiente forma:

$$x_{k+1} = \left[x_k - s_k \nabla f(x_k) \right]^+$$

- Donde $[]^+$ es la proyección sobre X, $\alpha_k \in (0,1]$ y el paso s_k es un escalar positivo.