Geometría Aleatoria

Modelado y Análisis de Redes de Telecomunicaciones

IIE - Facultad de Ingeniería

Curso 2014

Procesos Puntuales Marcados

- Dado $\Phi = \{x_n\}$ un proceso puntual de intensidad Λ, se define como proceso puntual marcado a $\widetilde{\Phi} = \{(x_n, Z_n)\}$ donde Z_n es una variable alatoria cualquiera

Procesos Puntuales Marcados

- Dado $\Phi = \{x_n\}$ un proceso puntual de intensidad Λ, se define como proceso puntual marcado a $\widetilde{\Phi} = \{(x_n, Z_n)\}$ donde Z_n es una variable alatoria cualquiera
- $\widetilde{\Phi}$ es estacionario si $\widetilde{\Phi} = \{(x_n, Z_n)\}$ y $\widetilde{\Phi}_x = \{(x_n + x, Z_n)\}$ tienen la misma distribución (las marcas acompañan a los puntos)

Procesos Puntuales Marcados

- Dado $\Phi = \{x_n\}$ un proceso puntual de intensidad Λ, se define como proceso puntual marcado a $\widetilde{\Phi} = \{(x_n, Z_n)\}$ donde Z_n es una variable alatoria cualquiera
- $\widetilde{\Phi}$ es estacionario si $\widetilde{\Phi} = \{(x_n, Z_n)\}$ y $\widetilde{\Phi}_x = \{(x_n + x, Z_n)\}$ tienen la misma distribución (las marcas acompañan a los puntos)
- Un proceso puntual marcado se puede ver como un proceso puntual en un espacio producto:
  - se define N_Z en $\mathbb{R}^d \times K$ como

    $$N_Z(C \times L) = \sum_{(x_n, z_n) \in \widetilde{\Phi}} \mathbf{1}_C(x_n) \mathbf{1}_L(z_n)$$

    cantidad de puntos del proceso en C con marcas en L.
  - Intensidad de N_Z:

    $$\Lambda_Z(C \times L) = E\left(N_Z(C \times L)\right)$$

Procesos Puntuales Marcados

- Fórmula de Campbell:

$$E\left(\sum_{(x,z)\in\widetilde{\Phi}} f(x,z)\right) = \int\int f(x,z)\Lambda_Z(d(x,z))$$

- ¿Relación entre Λ_Z y Λ? Λ_Z es absolutamente continua con respecto a Λ:

$$\Lambda_Z(C \times L) = \nu_Z(L)\Lambda(C)$$

  donde $\nu_Z(L)$ representa el número medio de puntos con marcas en L por unidad de área.

- En el caso estacionario se tiene que:

$$\begin{aligned}\Lambda_Z((C+x)\times L) &= E\left(N_Z((C+x)\times L)\right) \\ &= E(N_Z(C\times L)) = \Lambda_Z(C\times L)\end{aligned}$$

Procesos Puntuales Marcados

- Λ_Z es invariante por traslaciones entonces

  $\Lambda_Z(C \times L) = \mathrm{cte} \times \nu_d(C) = \Lambda_Z(B \times L)\nu_d(C)$ donde $\nu_d(B) = 1$

- De donde

$$\Lambda_Z(C \times L) = \frac{\Lambda_Z(B \times L)}{\lambda} \lambda \nu_d(C) = \frac{\Lambda_Z(B \times L)}{\lambda} \Lambda(C)$$

  y se obtiene que la distribución de las marcas está dada por:

$$\nu_Z(L) = \frac{\Lambda_Z(B \times L)}{\lambda}$$

- La fórmula de Campbell resulta entonces:

$$E\left(\sum_{(x,z) \in \widetilde{\Phi}} f(x,z)\right) = \lambda \int \int f(x,z) \nu_Z(dz) dx$$

  se separan las distribuciones de las marcas y el proceso.

- Fórmula de Campbell refinada: ¿Qué pasa para $h((x,z),\Phi)$?

Relación con la distribución Palm

- Definición de Matthes:

$$P_0(Y) = \frac{1}{\lambda\nu_d(B)} \int\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\varphi_{-x})P(d\varphi)$$

- Se considera $\widetilde{\Phi} = \{(x_n, z_n)\}$ donde $z_n = 1$ si $\Phi \in Y$
  - $\widetilde{\Phi}$ es p.p. marcado estacionario

$$\frac{1}{\lambda\nu_d(B)} P_0(Y) = \int\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\varphi_{-x})P(d\varphi)$$
$$= \int\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_{z_x}P(d\varphi)$$
$$= E\left(N_Z(\{1\} \times B)\right) = \Lambda_Z(\{1\} \times B) = \nu_Z(\{1\})\lambda\nu_d(B)$$

Entonces

$$P_0(Y) = \nu_Z(\{1\})$$

Distribución Palm de un p.p. Marcado

- Recordemos la fórmula de Campbell refinada

$$E\left(\sum_{x\in\Phi} h(x,\Phi)\right) = \int\int h(x,\varphi)P_x(d\varphi)\Lambda(dx)$$
$$= \int\int h(x,\varphi_x)P_0(d\varphi)\Lambda(dx)$$

- Para un proceso puntual marcado $\widetilde{\Phi}$ se tiene:

$$E\left(\sum_{(x,z)\in\widetilde{\Phi}} h((x,z),\widetilde{\Phi})\right) = \int\int\int h((x,z),\widetilde{\varphi}_x)P_0^z(\widetilde{\varphi})\Lambda_Z(d(x,z))$$
$$= \int\int\int h((x,z),\widetilde{\varphi}_x)P_0^z(\widetilde{\varphi})\nu_Z(dz)\Lambda(dx)$$

donde P_0^z se interpreta como la distribución de $\widetilde{\Phi}$ dado que tiene un punto en el origen con marca z.