Geometría Aleatoria

Modelado y Análisis de Redes de Telecomunicaciones

IIE - Facultad de Ingeniería

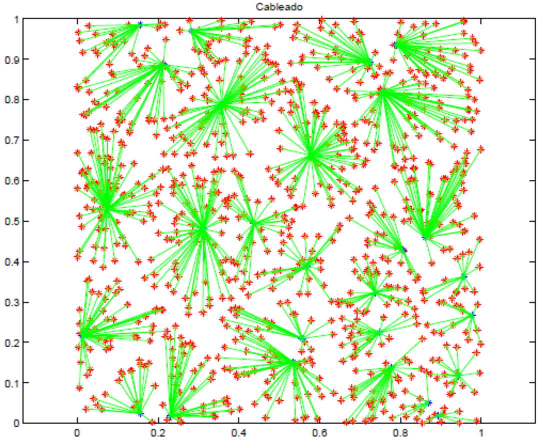
Geometría Aleatoria en Redes Inalámbricas

- A la hora de modelar el comportamiento de una red inalámbrica, la geometría de la localización de los nodos es fundamental (determina el SINR):
  - distribución espacial de terminales, antenas, receptores, servidores, etc...
  - movimientos de estos en el espacio
- Muchas veces estas características son (o se pueden asumir) aleatorias: geometría aleatoria
- Posibles aplicaciones:
  - Antenas en una red celular. Optimización costo/cobertura.
  - Movilidad de los clientes. Optimización cobertura/handovers.
  - Estaciones en una red ad-hoc. Probabilidad de conexión.
  - DSLAMs para proveer ADSL. Restricciones de distancia.
  - Ruteo

Diseño de una red de acceso (e.g. ADSL)

- Se consideran abonados y concentradores tales que:
  - abondados se asumen distribuidos aleatoriamente en una región
  - concentradores conectan a un conjunto de abonados: también se asumen aleatorios aunque son muchos menos
- Cada abonado se va a conectar al concentrador más cercano
- Se busca conocer la cantidad de concentradores necesaria (promedio por unidad de área) tal que:
  - la cantidad de abonados por concentrador sea acotada
  - la distancia al concentrador sea también acotada
- Herramienta: Mosaicos de Voronoi

Diseño de una red de acceso (e.g. ADSL)



Red Celular

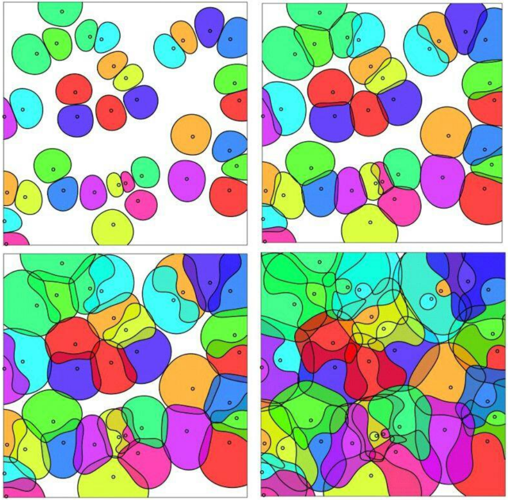
- Se usa el mismo modelo que antes, donde los abonados son los usuarios de la red celular y los concentradores las radio bases: cada usuario se conecta a la radio base más cercana
- Algunas posbiles preguntas:
    - ¿número medio de usuarios por radio base?
    - ¿distancia a la radio base más cercana?
    - ¿interferencia (media o máxima) en el receptor?
    - ¿capacidad del enlace?
    - etc, etc, etc
- Se pueden calcular parámetros de performance que dependan de la distancia a la radio base

Redes Ad-Hoc

- Conjunto de estaciones repartidas irregularmente que se comunican entre ellas o con receptores externos (de forma inalámbrica)
- La localización instantánea de las estaciones se puede modelar como la realización de un proceso puntual
- Obviamente hay muchas preguntas sobre una red de este tipo:
  - acceso: aloha - csma
  - conectividad
  - retardos
  - problemas de ruteo
  - etc. etc.
- En lo anterior no están considerados los aspectos físicos de la red (potencia de transmisión, atenuación, interferencia, etc).
- Existen modelos más "físicos" donde esta información se puede incorporar: modelos de cobertura

Redes Ad-Hoc: Modelos Booleanos

- A cada punto, se le puede asociar una región compacta cualquiera
- Se llama Modelo Booleano a la unión de los discos (regiones)



Redes Ad-Hoc: Modelos Booleanos

- Se considera ahora cada estación con su región de comunicación (a definir - puede tener en cuenta aspectos físicos)
- Se puede definir que dos estaciones son vecinas si pertenecen a sus regiones de comunicación respectivamente
- Usando el modelo booleano se puede calcular:
  - número de estaciones que "cubren" a un punto dado
  - número de estaciones que pertenecen a la región de cobertura de una estación dada
  - ambas cosas a la vez
- Esto permite definir conectividad en una red ad-hoc: percolación (conectividad completa o existencia de componentes gigantes)

Redes Inalámbricas: Modelos Booleanos/Cobertura

- Cada punto es una antena y se la considera junto con su región de cobertura
- Una antena puede llegar a un receptor si se encuentra en una cierta región (por ejemplo potencia recepción mayor que un cierto umbral)
- El modelo booleano da la región total de cobertura
- En este caso es posible calcular por ejemplo:
  - la probabilidad de cobertura de cualquier punto o región
  - probabibilidad de que dos puntos están cubiertos al mismo tiempo
  - distancia entre un punto no cubierto a la región de cobertura
  - fracción del espacio cubierta
  - número de antenas que cubren un punto dado

Redes Inalámbricas: CSMA

- La idea básica es generar zonas de exclusión: si alguien transmite nadie que lo escuche puede transmitir
- Si la interferencia depende solo de la distancia, las zonas de exclusión son bolas, en otro caso son conjuntos aleatorios
- Esto se puede modelar con lo que se conoce como Matérn hard- core (y variaciones)
- Se calculan por ejemplo probabilidades de acceso.

Redes Inalámbricas: Shot Noise

- También se pueden incorporar los aspectos físicos
- Una señal es bien recibida si el SINR (Signal to Interference plus Noise Ratio) mayor a cierto umbral
- EL SINR se puede modelar como un Shot Noise del cual se conocen la transformada de Laplace y en algunos casos (pocos) la distribución
- En algunos casos particulares existen resultados analíticos

Agenda para lo que sigue ...

1. Proceso Puntual
2. Proceso Puntual Poisson
3. Teoría Palm (probabilidades condicionadas a que hay un punto del proceso en un lugar dado)
4. Proceso Puntual Marcado
5. Aplicaciones: shot noise, modelos booleanos, mosaicos de Voronoi, procesos tipo Matérn

Referencias:

- Stoyan-Kendall-Mecke: "Stochastic Geometry and its Applications"
- Baccelli - Blaszczyszyn: "Stochastic Geometry and Wireless Networks"

Procesos Puntuales en $\mathbb{R}^d$

- Intuitivamente: colección de puntos al azar en el espacio ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^d$ o más generales), sin puntos de acumulación
- Ejemplo más simple: un sólo punto ξ uniformemente distribuido en un conjunto compacto $W \in \mathbb{R}^d$:

$$P(\xi \in A) = \frac{\nu_d(A)}{\nu_d(W)} \quad \text{para todo } A \in W$$

  donde $\nu_d(A)$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ (si $d = 2$ es el área, si $d = 3$ es el volumen).

- ¿Qué pasa si se superponen n puntos aleatorios independientes? Proceso puntual binomial con n puntos en W

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) &= P(\xi_1 \in A_1) \ldots P(\xi_n \in A_n) \\ &= \frac{\nu_d(A_1) \ldots \nu_d(A_n)}{\nu_d(W)^n} \end{aligned}$$

Proceso Puntual Binomial

- El vector $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es un vector uniforme en W^n.
- Sea $\Phi_{W^{(n)}}$ el patrón de puntos dado por $\xi_1, \ldots, \xi_n$ en W. Puede ser visto como:
  - un conjunto aleatorio: $\Phi = \{x_n\}$
  - una medida aleatoria: $\Phi = \sum_n \delta_{x_n}$ de manera que $\Phi_{W^{(n)}}(A)$ es una v.a. que cuenta el número de puntos del proceso $\Phi_{W^{(n)}}$ que pertenecen a A.
- ¿Porqué se llama Binomial? $\Phi_{W^{(n)}}(A)$ es una v.a. Binomial con parámetros $n = \Phi_{W^{(n)}}(W)$ y $p = p(A) = \frac{\nu_d(A)}{\nu_d(W)}$
- El número medio de puntos por unidad de área (intensidad) está dado por:

$$\lambda = \frac{\mathrm{E}[\Phi_{W^{(n)}}(A)]}{\nu_d(A)} = \frac{np(A)}{\nu_d(A)} = \frac{n}{\nu_d(W)} = \frac{\Phi_{W^{(n)}}(W)}{\nu_d(W)}$$

Proceso Puntual Binomial

- Si $A_1, \ldots, A_k$ forman una partición de W y $n_1 + \cdots + n_k = n$ se tiene que:

$$P(\Phi_{W^{(n)}}(A_1) = n_1, \ldots, \Phi_{W^{(n)}}(A_k) = n_k)$$
$$= \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \frac{\nu_d(A_1)^{n_1} \ldots \nu_d(A_k)^{n_k}}{\nu_d(W)^n}$$

¿Qué pasa si $n \to \infty$ y $p(A) \to 0$ tal que $np(A) = \lambda \nu_d(A)$ sea fijo?

- $\Phi_{W^{(n)}}(A)$ tiende a una dist. Poisson de parámetro $\lambda \nu_d(A)$
- Si hay un proceso límite Φ tiene que verificar esta propiedad y además de lo anterior se deduce que si los A_i son disjuntos entonces $\Phi(A_i)$ son independientes ("aleatorio puro").

Proceso Puntual Poisson Estacionario en $\mathbb{R}^d$

- Un p.p. Φ en $\mathbb{R}^d$ es un proceso de Poisson de intensidad Λ (medida positiva, determinística, localmente finita) si para todos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ disjuntos 2 a 2 y acotados se cumple que:

$$P(\Phi(A_1) = k_1, \cdots, \Phi(A_n) = k_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\Lambda(A_i)} \frac{(\Lambda(A_i))^{k_i}}{k_i!}$$

- Algunas propiedades directas de la definición:
  1. $\Phi(A)$ es una v.a. con distribución Poisson de parámetro $\Lambda(A)$
  2. En particular $\mathrm{E}(\Phi(A)) = \Lambda(A)$
  3. Si A y B son disjuntos, entonces $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ son independientes
- Recordar la def. de proc. de Poisson en $\mathbb{R}$: incrementos independientes y N_t v.a. poisson de parámetro λt.
- No es evidente que un tal proceso exista pero se construye

Proceso Puntual Poisson Estacionario en $\mathbb{R}^d$

- Proceso estacionario significa que $\Phi = \{x_n\}$ y $\Phi_x = \{x_n - x\}$ tienen la misma distribución para todo x.
- En este caso $\Lambda(A) = \lambda\nu_d(A)$ donde λ es el número medio de puntos en un conjunto de medida 1 (ver prop. 2).
- Como en $\mathbb{R}$ la intensidad Λ se puede interpretar en términos infinitésimales: sea B un conjunto de medida pequeña, entonces

$$
\begin{aligned}
P(\Phi(B) = 0) &= 1 - \lambda\nu_d(B) + o(\nu_d(B)) \\
P(\Phi(B) = 1) &= \lambda\nu_d(B) + o(\nu_d(B)) \\
P(\Phi(B) = 2) &= o(\nu_d(B))
\end{aligned}
$$

Proceso Puntual Poisson Estacionario en $\mathbb{R}^d$

- Si Φ es Poisson y Λ es no atómica entonces es simple: $P(\Phi(\{x\})) = 0$ o 1
  - $\Phi = \sum_i \delta_{x_i}$ con x_i distintos 2 a 2
- Definición equivalente (1): Φ es p.p. Poisson sii existe Λ localmente finita tal que la v.a. $\Phi(A)$ se distribuye como $\mathcal{P}(\Lambda(A))$ para todo A acotado
  - en particular, es suficiente que

$$P(\Phi(A) = 0) = e^{-\Lambda(A)}$$

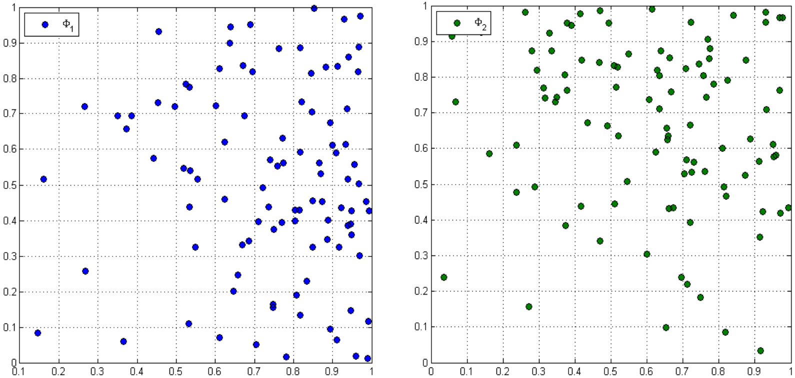
- Definición equivalente (2): Φ es p.p. Poisson sii
  - Φ es simple
  - para todo $A_1, A_2, \cdots, A_n$ disjuntos 2 a 2, resulta que $\Phi(A_1), \Phi(A_2), \cdots, \Phi(A_n)$ son independientes

Simulación del p.p. Poisson

- Sea Λ una medida con soporte acotado en W y sean $(N, X_1, X_2, \dots)$ v.a. independientes tales que:
  - N es $\mathcal{P}(\Lambda(W))$
  - $X_1, X_2, \dots$ son v.a. iid tales que $P(X_i \in B) = \frac{\Lambda(B)}{\Lambda(W)}$ (uniformes en W)

  entonces $\Phi = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i}$ es un p.p. Poisson de intensidad Λ
- Se sortea la cantidad de puntos N (con distribución Poisson de parámetro $\lambda\nu(W)$) y se distribuyen uniformes en W
- Se extiende a todo el espacio usando una partición de ventanas acotadas y se define un Poisson en cada una de ellas. ¿La superposición de Poisson es Poisson?

Poisson No-Homogeneo



Simulación de dos p.p. de Poisson Φ_1 y Φ_2 en $[0, 1]$ donde $d\Lambda_1(x, y) = 200x dx dy$ y $\Lambda_2(x, y) = 400xy dx dy$ (la cantidad de puntos tiene distribución Poisson de parámetro 100 en ambos casos)

Transformada de Laplace

- Sea f función real no negativa, se define la transformada o funcional de Laplace como:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathrm{E}\left(e^{-\int f(x)\Phi(dx)}\right)$$

- Si $\Phi = \sum_i \delta_{x_i}$, entonces

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathrm{E}(e^{-\sum_i f(x_i)}) = \mathrm{E}\left(\prod_i e^{-f(x_i)}\right)$$

- $\mathcal{L}_\Phi(f)$ caracteriza la distribución o ley de Φ:

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = \mathcal{L}_{(\Phi(A_1),\cdots,\Phi(A_k))}(t_1, \cdots, t_k) \quad \text{si} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{k} t_i 1_{A_i}(x)$$

- Proposición: Φ es p.p. Poisson de intensidad Λ sii

$$\mathcal{L}_\Phi(f) = e^{-\int 1-e^{-f(x)}\Lambda(dx)}$$

Operaciones que preservan el p.p. Poisson

1. **Superposición**: sean Φ_k p.p. Poisson de intensidades Λ_k independientes, entonces $\Phi = \sum_k \Phi_k$ es Poisson de intensidad $\Lambda = \sum_k \Lambda_k$
   - En general Φ es p.p. si $\Phi(A) < \infty$ para todo A acotado (la suma infinita puede degenerar)
2. **Refinamiento**: Sea $\Phi = \sum_i \delta_{x_i}$ p.p. y sea $p : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$. Un refinamiento (dependiente) de Φ es

$$\begin{aligned} \Phi^p &= \sum_i \epsilon_i \delta_{x_i} \text{ donde } \epsilon_i \text{ son independientes y} \\ P(\epsilon_i = 1|\Phi) &= 1 - P(\epsilon_i = 0|\Phi) = p(x_i) \end{aligned}$$

$\to$ cada punto es retenido con probabilidad $p(x_i)$

- Si Φ^p es un refinamiento de Φ, entonces

$$\mathcal{L}_{\Phi^p}(f) = \mathcal{L}_\Phi(g) \text{ con } g(x) = -\log(1 - p(x)(1 - e^{-f(x)}))$$

Operaciones que preservan el p.p. Poisson

- Un p-refinamiento de un p.p. de Poisson de intensidad Λ es un p.p. de Poisson de intensidad $p\Lambda$ donde

$$p\Lambda(A) = \int_A p(x)\Lambda(dx)$$

- Caso particular: refinamiento independiente ($p(x) = p$ para todo x)
  - un punto es retenido con probabilidad p
  - un p-refinamiento de un Poisson de intensidad λ es Poisson con intensidad λp (ejercicio!)

3. **Restricción**: la restricción de un p.p. de Poisson de intensidad Λ a un conjunto W es un p.p. de Poisson de intensidad $\Lambda'(\cdot) = \Lambda(\cdot \cap W)$

Operaciones que preservan el p.p. Poisson

4. **Transformación del Espacio**: sea $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ medible e invertible, se define la transformación de Φ por G como $\Phi' = \sum_i \delta_{G(x_i)}$
   - La transformación de un proceso de Poisson de intensidad Λ por una función G es un proceso de Poisson de intensidad $\Lambda'(A) = \Lambda(G^{-1}(A))$.
   - Basta realizar un cambio de variable en el cálculo de la transformada de Laplace.

Operaciones que preservan el p.p. Poisson

5. **Transformación Aleatoria de Puntos**: se considera $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ núcleo de probabilidad:
   - $p(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^{d'}$ $\forall x$, y cumple algunas condiciones de regularidad

   Se construye $\Phi^p = \sum_i \delta_{y_i} \in \mathbb{R}^{d'}$ tal que dado Φ los $\{y_i\}_i$ son independientes y $P(y_i \in B|\Phi) = p(x_i, B)$. Es equivalente a pedir que la transfomada de Laplace sea:

$$\mathcal{L}_{\Phi^p}(f) = \mathcal{L}(g) \quad g(x) = -\log \int e^{-f(y)} p(x, dy)$$

1. La transformación de un proceso de Poisson de intensidad Λ por un núcleo de probabilidad p es un proceso de Poisson de intensidad $\Lambda^p(A) = \int p(x, A)\Lambda(dx)$.