Cadenas de Markov
Tiempo Continuo

Modelado y Análisis de Redes de Telecomunicaciones

FACULTAD DE INGENIERIA

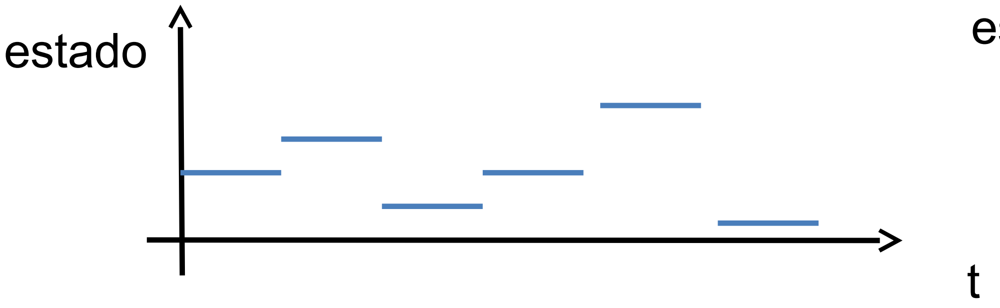
UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA URUGUAY

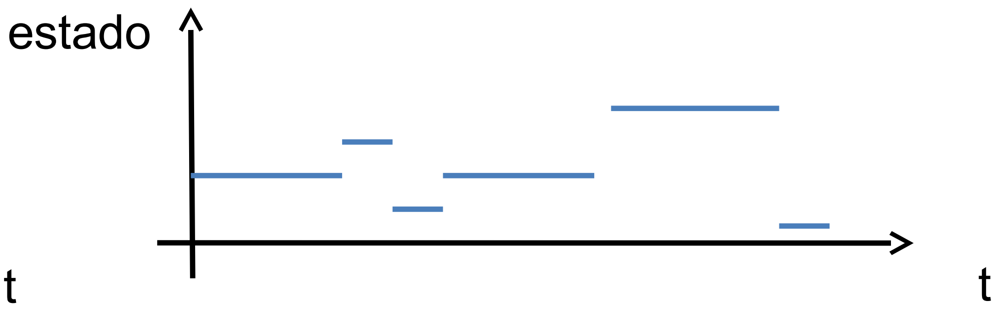
Agenda

- Cadenas de Markov en tiempo continuo
- Ergodicidad de la cadena
- Ejemplo: Líneas Telefónicas

CMTC

- Consideremos ahora los procesos de Markov donde:
  - El espacio de estados es discreto (finito o infinito)
  - El espacio de parámetros es **continuo** (un subconjunto de los reales; e.g. {t∈R: t ≥ 0})
    - Esta es la diferencia con las cadenas de Markov que manejamos hasta ahora
    - Una posible interpretación intuitiva es que los cambios de estado ahora se pueden dar en “cualquier instante”





CMTC

- ¿Pero es estrictamente cierto que los cambios pueden darse en **cualquier** momento?
  - Repasemos la condición de Markov:

$$P\left(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_1} = x_1\right) = P\left(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} | X_{t_n} = x_n\right)$$
$$\forall n, \forall t_1 < \ldots < t_n$$

  - En particular, la condición quiere decir que cuánto tiempo hace que estoy en un estado no me dice nada con respecto a dónde voy a estar en el futuro
  - ¿Qué distribución cumple esto? La exponencial
- El tiempo que la cadena permanece en cada estado es una v.a. de distribución exponencial con una media que depende únicamente del estado

Matriz de Transiciones

- Al igual que en la cadena a tiempo discreto, podemos definir una matriz de transiciones:

$$P\left(X_{t+s}=j|X_t=i\right)=p_{ij}(t,s)$$
$$\mathbf{P}(t,s)=\left(p_{ij}(t,s)\right)_{i,j\in E}$$

  - Cuál es la probabilidad de pasar en tiempo *t* del estado *i* al *j* en *s* unidades de tiempo
- La cadena es **homogénea** si las probabilidades no dependen de *t* (el momento que miro la cadena)

$$P\left(X_{t+s}=j|X_t=i\right)=P\left(X_s=j|X_0=i\right)=p_{ij}(s)$$
$$\mathbf{P}(s)=\left(p_{ij}(s)\right)_{i,j\in E}$$

  - Atención: en el caso de tiempo continuo las probabilidades de transición sí dependen del tiempo dentro del que volveremos a ver al proceso (*s*)

Matriz de Transiciones

- Como antes, siguen valiendo las siguientes relaciones:

$$P(X_{t+s}=j)=\sum_{i\in E}P(X_{t+s}=j|X_t=i)P(X_t=i)=$$

$$\Rightarrow P(X_{t+s}=j)=\sum_{i\in E}p_{ij}(s)P(X_t=i)$$

  - Que en forma matricial resulta:

$$\pi(t+s)=\pi(t)\mathbf{P}(s)$$

- También valen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t),\quad \forall s,t\geq 0,i,j\in E$$

  - Escrito como matrices resulta:

$$\mathbf{P}(s+t)=\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$$

Generador Infinitesimal

- La última ecuación es importante
- Derivemos respecto a t y evaluemos en *t*=0

$$\mathbf{P}'(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}'(0)$$

- Con esta ecuación diferencial y la condición inicial **P**(0) = I se puede hallar **P**(s):

$$\mathbf{P}(s) = e^{\mathbf{P}'(0)s} = e^{\mathbf{Q}s}$$

- La matriz **Q** = **P**'(0) se llama generador infinitesimal
  - Encontrando **Q**, puedo escribir **P**(*s*) para cualquier *s*
  - => Basta con conocer **Q** (y π(*0*)) para caracterizar la cadena

Generador Infinitesimal

- Los elementos de **Q** valen:

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \quad i \neq j$$

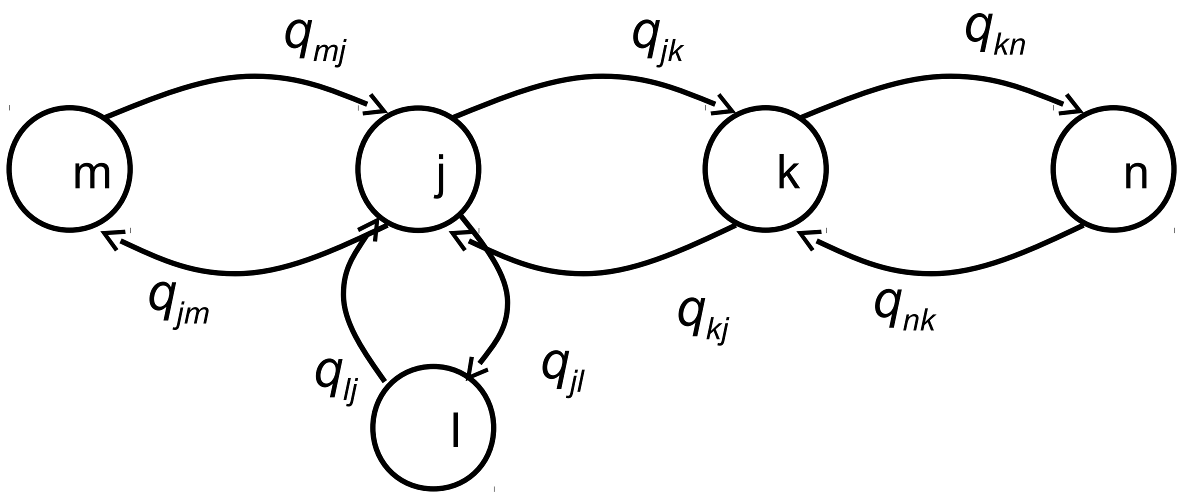
$$q_{ii} = -q_i = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$$

- Es fácil entender el valor de los q_{ij} fuera de la diagonal
  - Se pueden interpretar como la tasa de transiciones de *i* a *j* (cantidad de transiciones de *i* a *j* por unidad de tiempo)

- Por conservación de masa la suma por fila de **Q** debe ser cero (o me voy del estado *i* o me quedo)
  - Razón intuitiva por la que $q_{ii}=-\sum q_{ij}$ (las filas suman cero)
  - q_i es la tasa de salida del estado *i* (cantidad de transiciones que salen de *i* por unidad de tiempo)

Grafo de la Cadena

- Como antes también se puede representar mediante un grafo



Definición Alternativa

- Se dice que una CMTC es un proceso de Markov tal que:
  - El tiempo de permanencia en un estado *i* es exponencial de parámetro λ_i independientes para cada estado
  - Al próximo estado *j* se pasa de acuerdo a una probabilidad de transición p_{ij} (no confundir con las entradas de la matriz $\mathbf{P}(s)$)

- Las transiciones se realizan de acuerdo a una CMTD pero los tiempos de permanencia son exponenciales

Relación entre ambas definiciones

- ¿Cuánto vale q_i la intensidad de salida del estado *i*?
  - Claramente λ_i => q_{ii} =-λ_i
- ¿Cuánto vale q_{ij} la intensidad de ir hacia al estado *j* desde el estado *i*?
  - Dado que si salgo del estado *i* voy al estado *j* con probabilidad p_{ij} => $q_{ij} = \lambda_\mathrm{i}\, p_{ij}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 p_{12} & \lambda_1 p_{13} & \cdots & \lambda_1 p_{1n} \\ \lambda_2 p_{21} & -\lambda_2 & \lambda_1 p_{23} & \cdots & \lambda_2 p_{2n} \\ \lambda_3 p_{31} & \lambda_3 p_{32} & -\lambda_3 & \cdots & \lambda_3 p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n p_{n1} & -\lambda_n p_{n2} & \lambda_n p_{n3} & \cdots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

Agenda

- Cadenas de Markov en tiempo continuo
- Ergodicidad de la cadena
- Ejemplo: Líneas Telefónicas

Distribución de la Cadena

- La distribución de la cadena en tiempo *t* es el vector fila π_t de las probabilidades de estar en cada estado en tiempo t:

$$\pi_t(i) = P(X_t = i)$$

- Se cumple que $\pi_{t+s} = \pi_t \, P(s)$
  - En particular $\pi_t = \pi_0 \, \mathbf{P}(t)$

- Se dice que μ es distribución límite para π_0 si

$$\lim_{t \to \infty} \pi_t = \lim_{t \to \infty} \pi_0 \mathbf{P}(t) = \mu$$

Distribución de la Cadena

- Si μ es distribución límite entonces es invariante: $\mu = \mu\, \mathbf{P}(t)$ para todo t
- Derivando con respecto a t y evaluando en t=0 se tiene que μ es invariante sii

$$\mu \mathbf{Q} = 0$$

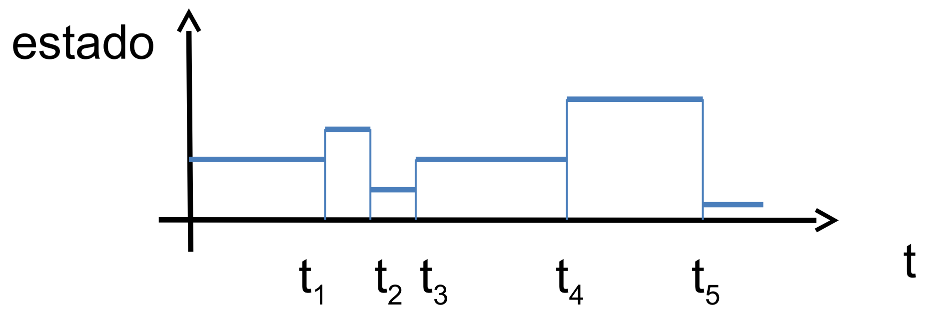
- En caso de que exista distribución límite basta resolver este sistema de ecuaciones para calcularla

Ergodicidad

- Como en el caso discreto interesa analizar si existe algún régimen asintótico. Es decir:
  - ¿Existe π_t para *t* suficientemente largo?
  - ¿Es independiente de la condición inicial π_0?
  - ¿Es única?
- *X* es ergódica si existe una única distribución límite.
- Para responder a estas preguntas, vamos a estudiar la denominada **cadena incluida**

Cadena Incluida

- Sea $\{t_n\}$ los tiempos en los que se dan los cambios (sucesión de los tiempos de transición)



- Podemos definir una cadena de Markov en tiempo discreto X_n cuyos valores sean $X_{t_n^+}$
  - X_n coincide con el valor de $X(t)$ entre t_n y t_{n+1}
- X_n es la cadena incluida de X_t

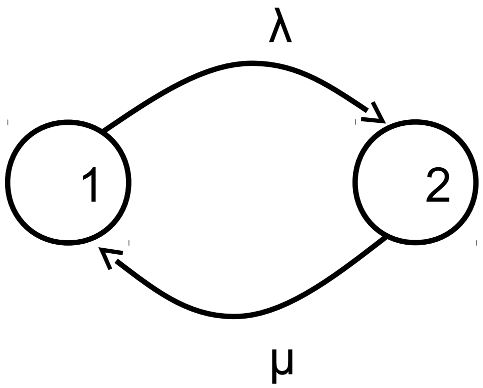
Cadena Incluida

- Los conceptos de recurrencia e irreducibilidad de la cadena original se definen en términos de la cadena incluida
  - La periodicidad en este caso no tiene sentido
- Si la cadena incluida es:
  - Irreducible
  - Recurrente positiva

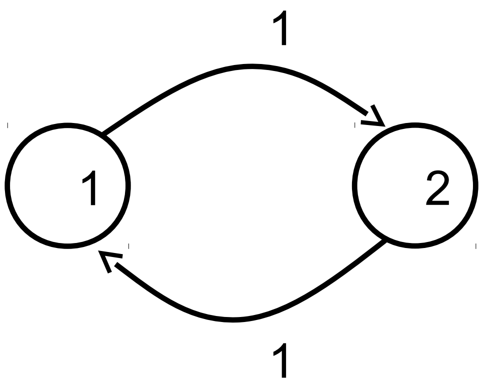
  => la cadena original es ergódica y tiene una única distribución límite.

Ergodicidad - Ejemplo

- La CMTC definida por el siguiente grafo ¿Es ergódica?



Cadena Incluida:



IMPORTANTE: La cadena incluida puede NO ser ergódica, pero sí serlo la cadena original

Ergodicidad

- Para una CMTC irreducible y recurrente, son equivalentes:
  1) X es ergódica con distribución límite π
  2) π **Q** = 0

- Si X y X_n son ergódicas con distribuciones límites π y p respectivamente, se cumple que:

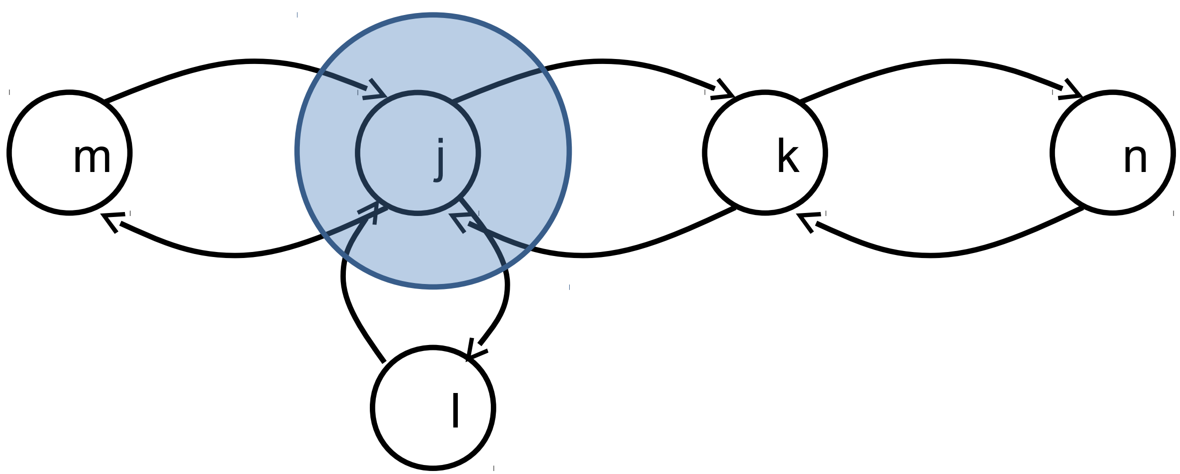
$$p_j = \frac{\pi_j / q_j}{\sum_{k \in E} \pi_k / q_k}$$

Ecuaciones de Balance

- Si π es distribución invariante cumple π**Q**=0

$$\sum_{i\in E}\pi_\infty(i)q_{ij}=0\Rightarrow\sum_{i\neq j}\pi_\infty(i)q_{ij}=-\pi_\infty(j)q_{jj}\Rightarrow$$

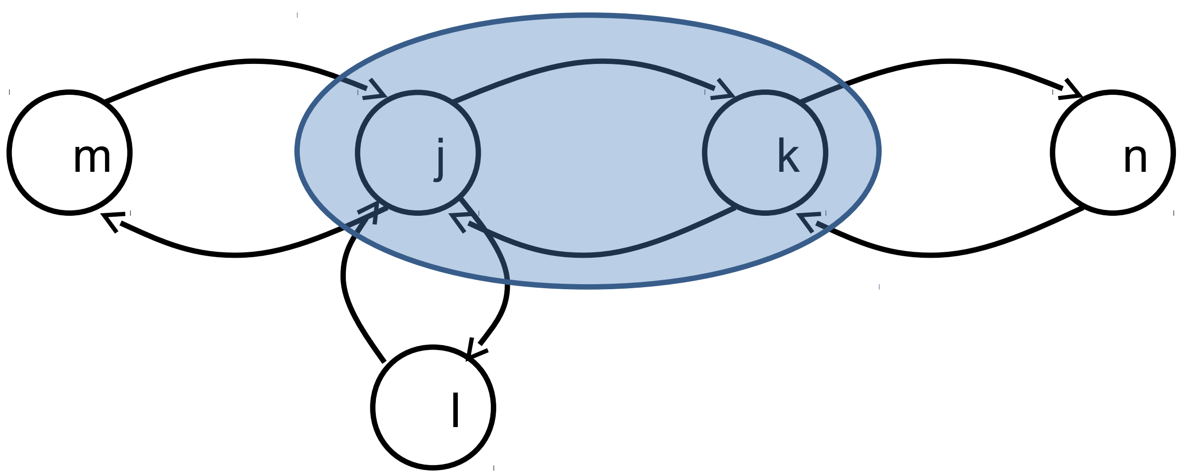
$$\Rightarrow\sum_{i\neq j}\pi_\infty(i)q_{ij}=\pi_\infty(j)\sum_{i\neq j}q_{ji}$$



Ecuaciones de Balance

- Más en general, y al igual que el caso discreto, se puede tomar un conjunto *S* de estados:

$$\sum_{j\in S} \pi_\infty(j) \sum_{i\notin S} q_{ji} = \sum_{i\notin S} \pi_\infty(i) \sum_{j\in S} q_{ij}$$

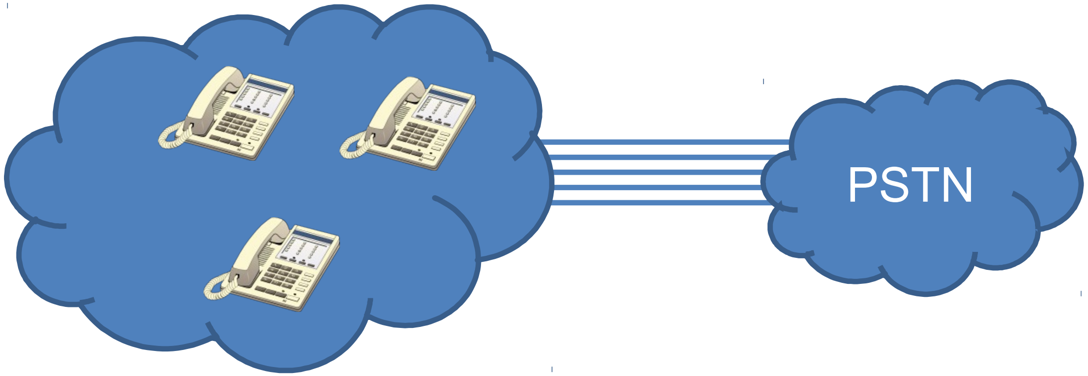


Agenda

- Cadenas de Markov en tiempo continuo
- Ergodicidad de la cadena
- Ejemplo: Líneas Telefónicas

Ejemplo

- Volvamos a uno de los primeros ejemplos:



- ¿Cómo analizar este sistema? ¿Qué hipótesis necesito?