Repaso Probabilidad y Estadística

Modelado y Análisis de Redes de Telecomunicaciones

UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Agenda

- Definiciones
- Probabilidad Condicional
- Variables Aleatorias
- Vectores Aleatorios
- Esperanza y otros momentos
- Procesos Estocásticos

Probabilidad Básica - Definiciones

- Espacio de sucesos elementales Ω (o espacio muestral):
  - Todos los posibles resultados de un experimento
  - Puede ser:
    - Discreto: lo que sale al tirar una moneda Ω = {cara, cruz}
    - Continuo: la vida útil de una lamparita $\Omega = \{x \in \mathbb{R}: x>0\}$
  - Cada elemento lo notaremos con la letra ω
- σ-álgebra de Ω (formalidad matemática)
  - Define la colección de posibles conjuntos con probabilidad
  - $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de Ω sii cumple
    - $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío de subconjuntos de Ω
    - Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}$
    - Si $A_1, A_2, ..$ Es un conjunto numerable o finito $\Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{A}$
  - Obviamente $\mathcal{A}$ incluye al conjunto vacío y a Ω
- Evento A
  - Un elemento de la σ-álgebra $\mathcal{A}$
  - Ejemplos:
    - Que salga cara al tirar la moneda: A={cara}
    - Que la lamparita dure más de 3000 segundo: $A = \{x \in R: x>3000\}$

Probabilidad Básica – Axiomas

- Probabilidad $P(A)$
  - Es una función que asocia cada evento con un valor entre 0 y 1
  - Su interpretación frecuentista es que la probabilidad mide la frecuencia relativa de ocurrencia del evento A
- Tres axiomas para definir la teoría de probabilidad (Kolmogorov, 1933):
  1. A cada suceso A le corresponde un número no negativo $P(A)$, llamado probabilidad del suceso A.
  2. $P(\Omega)=1$
  3. Si $A_1,A_2,..$ es un conjunto numberable de sucesos incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$), entonces $P(\cup_i A_i)=\sum P(A_i)$
- La terna $(\Omega,\mathcal{A},P)$ se denomina espacio de probabilidad
- En lenguaje de análisis real: $(\Omega,\mathcal{A})$ es un espacio medible con medida no negativa P, que verifica $P(\Omega)=1$

Espacio de probabilidad - Ejemplos

- Ejemplo discreto:
  - $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ (ω_1=éxito, ω_2=fracaso)
  - $\mathcal{A}=\{\phi,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega1,\omega_2\}\}$
  - P: $P(\phi)=0$, $P(\{\omega_1\})=p\leq1$, $P(\{\omega_2\})=1-p$, $P(\{\omega_1,\omega_2\})=1$

- Ejemplo continuo:
  - $\Omega=[0,1)$
  - $\mathcal{A}$ = la σ-álgebra de los conjuntos borealianos de [0,1)
  - $P(A)$ = la medida de Lebesgue de A ($P([a,b])=b-a$)

Algunas propiedades

- Estas propiedades sencillas se pueden probar de los axiomas:
  - Para cualquier suceso A, se tiene que $P(A^c)=1-P(A)$
  - $P(\phi)=0$
  - Si A está contenido en B => $P(A)\leq P(B)$
  - Para cualquier suceso A se tiene que $0\leq P(A)\leq 1$
  - Para dos sucesos cualesquiera => $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Agenda

- Definiciones
- Probabilidad Condicional
- Variables Aleatorias
- Vectores Aleatorios
- Esperanza y otros momentos
- Procesos Estocásticos

Probabilidad Condicional

- Sea $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espacio de probabilidad, y A y B dos eventos cualquieras (con $P(A)>0$)
  - Probabilidad condicional de B dado A (probabilidad de que suceda B, dado que sucedió A)

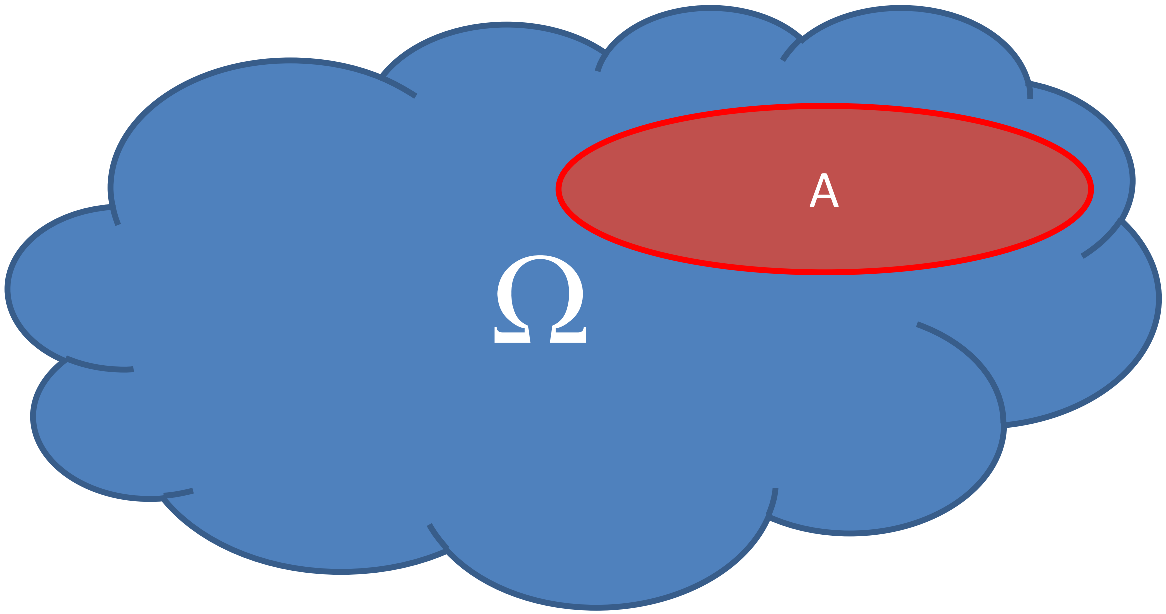
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- ¿Es una probabilidad?
  1. Está claro que $P(B|A) \geq 0$
  2. $P(\Omega|A)=P(\Omega \cap A)/P(A)=P(A)/P(A)=1$
  3. $P(\cup_i B_i|A)=P(A\cap(\cup_i B_i))/P(A)=P(\cup_i(A\cap B_i))/P(A)=\sum P(A\cap B_i)/P(A)= \sum P(B_i|A)$

- Entonces si $(\Omega,\mathcal{A},P)$ es un espacio de probabilidad y A es un evento con probabilidad positiva => $(\Omega,\mathcal{A},P(.|A))$ es también un espacio de probabilidad

Probabilidad Condicional

- Intuitivamente la probabilidad condicional hay que pensarla como que para calcular las probabilidades, Ω pasó a ser A
- Ejemplo:
  - En un mazo de cartas, cuál es la probabilidad de sacar corazón
  - En un mazo de cartas, cuál es la probabilidad de sacar corazón dado que salió color rojo



Probabilidad Condicional

- Fórmula de la probabilidad total:
  - Tomemos una partición del espacio de muestreo $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$

$$\cup_i A_i = \Omega \text{ y } A_i \cup A_j = \phi \; i \neq j$$
$$\Rightarrow B = B \cap \Omega = B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$$
$$\Rightarrow P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i) P(A_i)$$

- Muy útil y muy usada. Típico ejemplo de aplicación: calcular $P(B)$ cuando es fácil conocer su probabilidad dada una partición.
- Ejemplo tonto de uso.
  - Tengo 3 cajones con fruta. En uno de ellos la mitad está podrida, en otro la tercera parte, y en otro ninguna. Se elige un cajón al azar, y de él una fruta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta elegida esté podrida?

Independencia

- Dos eventos A y B son independientes sii:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$$
$$\Rightarrow P(B|A) = P(B)$$

- Sea un conjunto de sucesos $A_1, \ldots, A_n$
  - Los sucesos se dicen **independientes dos a dos** cuando:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

  - Los sucesos se dicen **mutualmente independientes** (o **independientes** a secas) si para cualquier elección de $i_1, \ldots, i_k$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$:

$$P(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}) = \prod_{m=1}^{k} P(A_{i_m})$$

Independencia

- Cuidado porque independencia de eventos es más fuerte que independencia dos a dos:
  - Ejemplo:
    - Sea un tetraedro con:
      - Una cara roja
      - Un cara azul
      - Una cara verde
      - Una cara roja, azul y verde
    - Tres eventos:
      - A={La cara donde se apoya el dado tiene rojo}
      - B={La cara donde se apoya el dado tiene azul}
      - C={La cara donde se apoya el dado tiene verde}
    - $P(A)=1/2$; $P(B)=1/2$; $P(C)=1/2$
    - $P(A \cap B)=1/4=P(A)P(B)$; $P(A \cap C)=1/4=P(A)P(C)$; $P(C \cap B)=1/4=P(C)P(B)$ => **Independientes dos a dos**
    - $P(A \cap B \cap C)=1/4 \neq P(A)P(B)P(C)=1/8$ => **No son independientes**

Agenda

- Definiciones
- Probabilidad Condicional
- Variables Aleatorias
- Vectores Aleatorios
- Esperanza y otros momentos
- Procesos Estocásticos

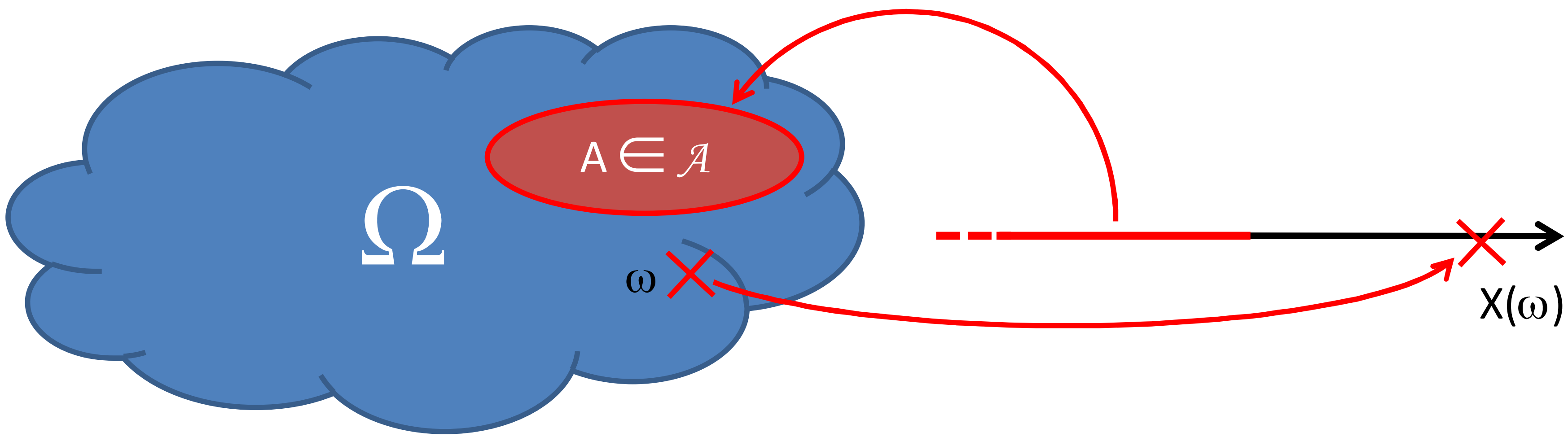
Variables Aleatorias

- En un espacio de probabilidad (Ω,$\mathcal{A}$,P) se llama Variable Aleatoria (V.A.) a una función del espacio muestral a los reales:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

y que cumple la siguiente propiedad

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$



Variables Aleatorias

- Ejemplos:
  - Moneda: X(cara) = 0; X(cruz) = 1 (o cualquier otra función)
  - Duración de una lamparita (con $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de los conjuntos borealianos de la semirrecta positiva):
    - Sea ω_t el evento de que la lamparita dure t segundos
    - $X(\omega_t)=t$ es una V.A.
- La transformación entre los eventos elementales y los reales mediante la variable aleatoria es generalmente obviada, pero no hay que olvidarse de ella!!

Variables Aleatorias

- Función de Distribución (o CDF en inglés):

$$P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x) = F(x)$$

  - Por definición de V.A. el evento $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ => $P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$ está bien definida
    - En realidad se puede probar que $P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ está bien definida para cualquier conjunto borealiano

- Algunas propiedades:
  - Si $a<b$ => $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$
  - $F(x)$ es no decreciente en toda la recta
  - F(x) tiene los siguientes límites

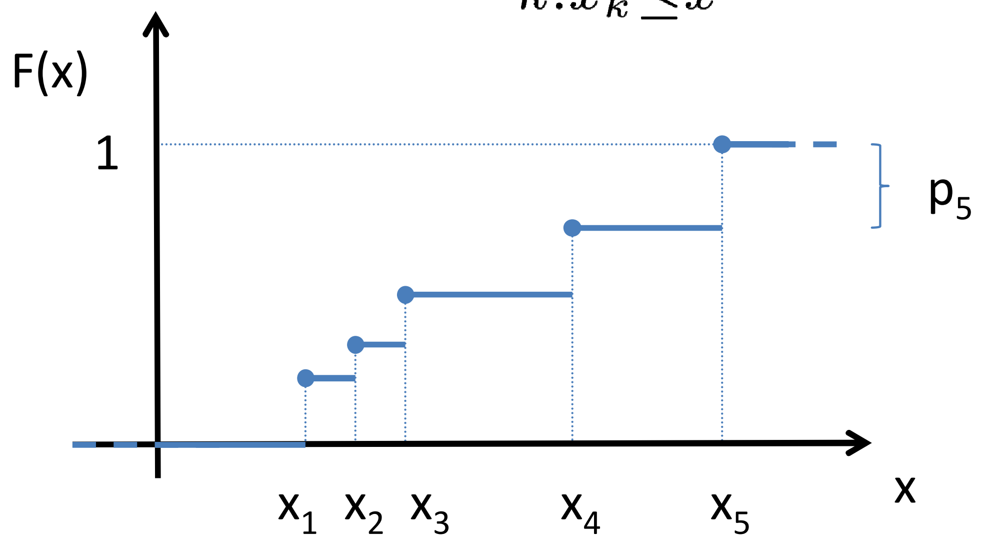
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

  - F(x) es continua por derecha

Variables Aleatorias Discretas

- Una V.A. X se dice discreta si existe un conjunto B finito o numerable de puntos de la recta tal que $P(X \in B)=1$
- Si $B=\{x_1,x_2,\ldots\}$ y $P(X=X_k)=p_k$ entonces:

$$F(x) = \sum_{k:x_k \leq x} p_k$$



Ejemplos de Distribución

- V.A. con distribución geométrica
  - *X* ~ Geom(p)
  - *X* representa el número de intentos que se necesitan para que ocurra por primera vez un evento de probabilidad *p*:

$$p_i = P(X = i) = (1-p)^{i-1} p$$

$$F(x) = 1 - P(X > n) = 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i = 1 - (1-p)^n$$

  - Interesante:

$$P(X > i + j | X > i) = \frac{P(X > i + j \cap X > i)}{P(X > i)} = \frac{P(X > i + j)}{P(X > i)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{i+j}}{(1-p)^i} = P(X > j)$$

Las v.a. geométricas no tienen memoria!!

V.A. Absolutamente Continuas

- Una V.A. se dice absolutamente continua si su función de distribución F(x) puede escribirse como una integral:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

con $f(u)$ una función no negativa e integrable

- Algunas propiedades:
  - $P(X=x_0)=0$
  - $P(a \leq X \leq b)=P(a<X \leq b)=P(a \leq X<b)=P(a<X<b)=\int_a^b f(u)du$

Ejemplos de Distribuciones

- V.A. con distribución exponencial
  - $X \sim \exp(\lambda)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  - Al igual que la geométrica, tampoco tiene memoria

$$P(X > t + x | X > t) = \frac{P(X > t + x, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t + x)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = P(X > x)$$

  - Es la **única** distribución continua que cumple esta propiedad

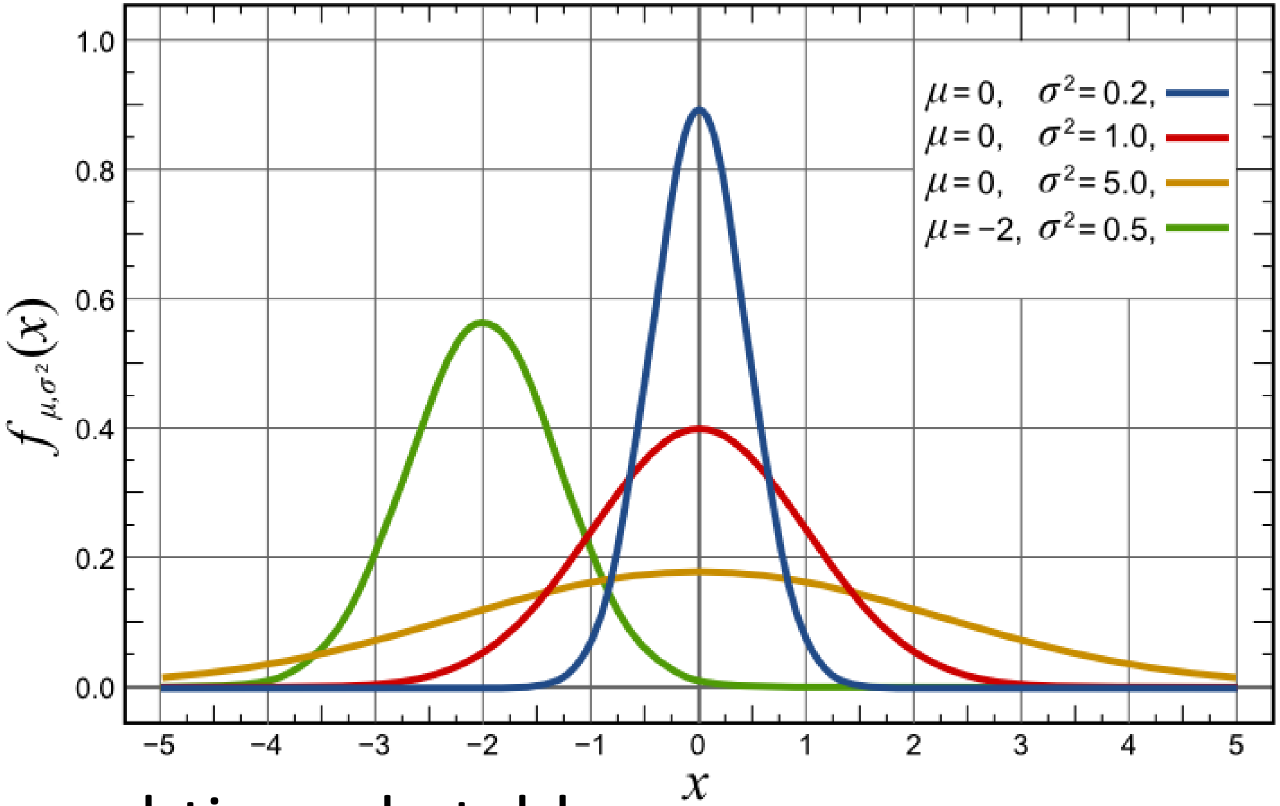
Ejemplos de Distribuciones

- V.A. con distribución Normal
  - $X \sim N_{\mu,\sigma}$

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  - Es fácil ver que:

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = F_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



  - Los valores de $F_{0,1}$ se obtiene de tablas
- Es la distribución más famosa pues los promedios tienden (bajo ciertas condiciones) a ella

Agenda

- Definiciones
- Probabilidad Condicional
- Variables Aleatorias
- Vectores Aleatorios
- Esperanza y otros momentos
- Procesos Estocásticos

Vectores Aleatorios

- Sean $X_1,\ldots,X_n$ V.A. definidas en $(\Omega,\mathcal{A},P)$
  - El vector $X=(X_1,\ldots,X_n)$ se denomina vector aleatorio o variable aleatoria multidimensional
- Está claro que:

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x_i\} \in \mathcal{A}$$

- Entonces está bien definida la función de distribución n-dimensional:

$$F(x_1,\ldots,x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x_i\}\right) =$$

$$= P(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n)$$

  - Sus props. son análogas al caso unidimensional al igual que la densidad para el caso absolutamente continuo

Independencia

- Las V.A. $X_1,\ldots,X_n$ se dicen independientes sii:

$$F(x_1,\ldots,x_n) = F_1(x_1)\ldots F_n(x_n)$$

  - Donde:
    - $F(x_1,\ldots,x_n)$ es la distribución del vector $(X_1,\ldots,X_n)$
    - $F_i(x_i)$ es la distribución (llamada marginal) de X_i
  - Lo que quiere decir que los eventos $\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1\}, \ldots, \{\omega : X_n(\omega) \leq x_n\}$ son independientes

- Para V.A. discretas esto es equivalente a:

$$P(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

- Y para V.A. absolutamente continuas a:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k) \quad c.s.$$

Ejemplo de vector aleatorio

- El vector $X=(X_1,\ldots,X_n)$ tiene distribución normal n-dimensional si tiene la densidad

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)^T}$$

  - Donde
    - x y μ son vectores filas de números reales
    - Σ es una matriz nxn definida positiva, no singular y simétrica

  - Se puede probar que si Σ es diagonal, entonces el vector X es independiente

Agenda

- Definiciones
- Probabilidad Condicional
- Variables Aleatorias
- Vectores Aleatorios
- Esperanza y otros momentos
- Procesos Estocásticos

Esperanza

- Sea X una V.A. definida en $(\Omega,\mathcal{A},P)$
- La esperanza de una función de la V.A. $g(X)$ se define como:
  - Caso más general:

$$E\{g(X)\} = \int_{\Omega} g(X)dP$$

  - Para V.A. discretas:

$$E\{g(X)\} = \sum_{i} g(x_i)P(X = x_i)$$

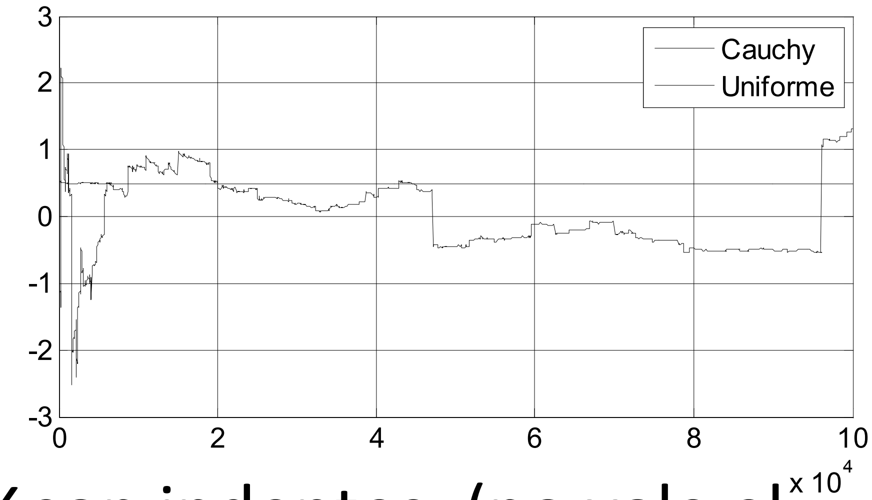
  - Para V.A. absolutamente continuas:

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Esperanza

- Intuitivamente la esperanza es el "centro de masa" de la v.a. *X* o el valor promedio de infinitas realizaciones
- Atención porque la existencia de la esperanza no está asegurada
  - Ej. La distribución de Cauchy no tiene esperanza

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma}\right]$$



- Algunas propiedades
  - E{*X*+*Y*} = E{*X*} + E{*Y*}
  - E{*XY*} = E{*X*}E{*Y*} cuando *X* e *Y* son indeptes. (no vale el recíproco!!)

Ley Fuerte de los Grandes Números

- Sean $X_1,\ldots,X_n$ V.A. definidas en $(\Omega,\mathcal{A},P)$ independientes e idénticamente distribuidas y tales que existe la esperanza $E\{X_1\}$
  - Entonces tiene lugar la convergencia:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \rightarrow E\{X_1\} \quad \text{c.s.}$$

- c.s.: Casi Seguramente
  - $X_n \to X$ c.s. si se verifica $P(\{\omega: X_n(\omega)\to X(\omega)\})=1$

Varianza

- Sea X una V.A. definida en $(\Omega,\mathcal{A},P)$
- La varianza de X se define como:

$$\mathrm{Var}\{X\} = E\left\{(X - E\{X\})^2\right\}$$

  - También se pueden encontrar referencias a la desviación estándar σ_X: $$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\{X\}$$
- **Si la varianza existe** (y por ende la esperanza), es una medida de la concentración de la V.A. alrededor de la esperanza
  - Desigualdad de Chebishev:

$$P(X \geq t) \leq \frac{1}{t}E\{X\} \text{ (Si } X \text{ es no negativa)} \Rightarrow$$

$$P(|X - E\{X\}| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}\{X\}$$

Varianza

- Un par de fórmulas útiles:

$$\mathrm{Var}\{X\} = E\{X^2\} - E^2\{X\}$$
$$\mathrm{Var}\{X\} = E\{X(X-a)\} - E\{X\}(E\{X\}-a)$$

- Algunas propiedades:
  - Var{$aX+b$}=a^2Var{X}
  - Sean $X_1,\ldots,X_n$ V.A. independientes dos a dos para las cuales existe la varianza => Var{$X_1 + \ldots + X_n$} = Var{X_1} + … + Var{X_n}

Teorema Central del Límite

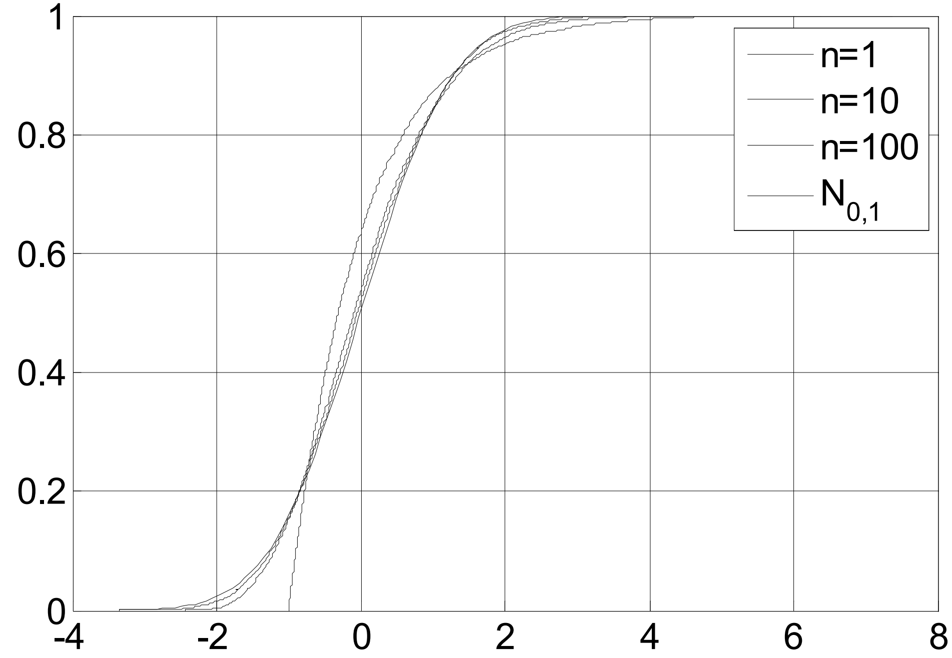
- Sean $X_1,\ldots,X_n$ V.A. definidas en $(\Omega,\mathcal{A},P)$ independientes e idénticamente distribuidas y tales que existe la esperanza $E\{X_1\}$ y varianza $\mathrm{Var}\{X_1\}=\sigma^2$. Sea:

$$F_n(x) = P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n - nE\{X\}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right)$$

  - Entonces:

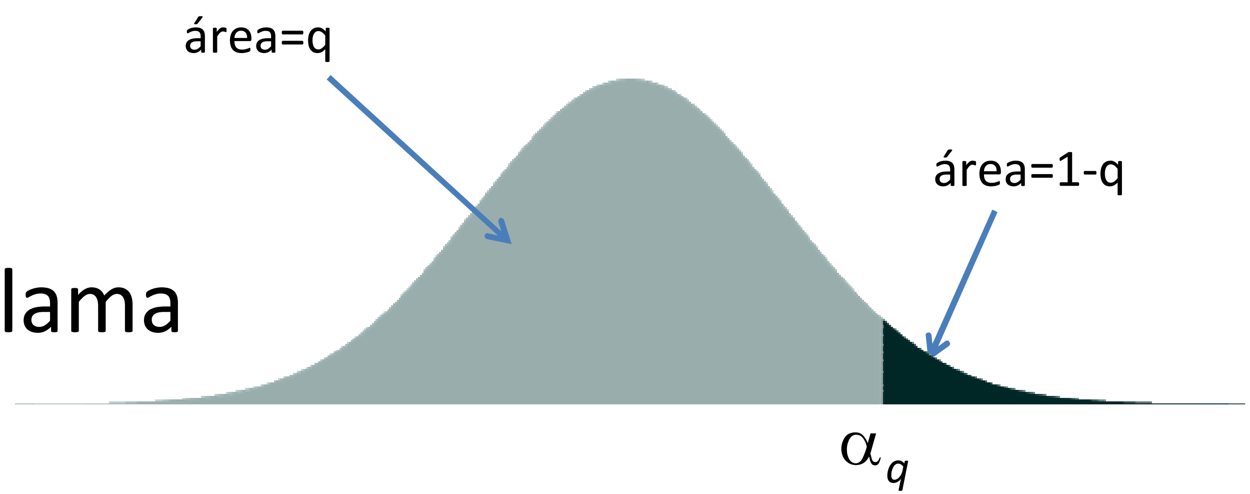
$$F_n(x) \underset{n}{\rightarrow} F_{N_{0,1}}(x)$$

- Ejemplo: $X_i \sim \exp(1)$



Cuantiles

- ¿Cómo se “resume” una V.A. cuando no tiene media y/o varianza?
  - Los cuantiles!
- Sea un número $0<q<1$. Se llama cuantil de orden q de la V.A. X a cualquier número α_q que verifique
  - $P(X \leq \alpha_q) \geq q$
  - $P(X \geq \alpha_q) \geq 1-q$
- α_q con $q=1/2$ se llama mediana



Covarianza

- Sean X e Y dos V.A. definida en $(\Omega,\mathcal{A},P)$
- La covarianza entre X e Y se define como:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{X,Y\} &= E\left\{(X-E\{X\})(Y-E\{Y\})\right\}\\ &= E\{XY\}-E\{X\}E\{Y\}\end{aligned}$$

- Si X e Y son independientes => Cov$\{X,Y\}=0$
  - El recíproco en general es falso
  - Ejemplo:
    - Sea X una V.A. con densidad simétrica alrededor del cero (i.e. $f(x)=f(-x)$)
    - Sea $Y=X^2$
    - E$\{XY\}$=E$\{X^3\}=0$ y E$\{X\}$E$\{Y\}=0$ => Cov$\{X,Y\}=0$
    - ¿X e Y son independientes?
  - Sin embargo, es verdadero para Vectores Aleatorios normales

Covarianza

- No confundir correlación con causa-efecto
  - Edad correlacionado con talle
    - ¿¿ talle => edad ??
  - Puede ser más sutil

AVAAZ.ORG
AVAAZ DAILY BRIEFING

19,801,556 MEMBERS WORLDWIDE | AVAAZ HOME | ABOUT US | HIGHLIGHTS | HELP US BUILD THIS. | SEND US YOUR IDEAS ...

CORRUPTION

More women, less corruption?

by Avaaz Team - *posted 10 December 2012 16:11*

Share on Facebook | Twitter | Email | Google | StumbleUpon

Yulia Tymoshenko and Margaret Thatcher: different systems, different leaders (AFP/Getty)

Are women leaders less corrupt than their male counterparts? That's a tricky one. The answer, it seems, is something like yes and no.

It's a loaded question, but it's also a terribly important one. Let's start with a well-known 1999 World Bank study, which found that for every standard deviation point increase in women in public office above 10.9 percent, corruption decreased 10%. That seems like pretty straightforward evidence, but things may not be that simple. Countries with more women in positions of power do tend to be less corrupt than their less egalitarian neighbours. But that trend may have more to do with transparent and accountable systems of governance rather than gender.

Reuters cites a new study, entitled Fairer Sex or Purity Myth?:

> The report found that in autocratic regimes with strong male hierarchies, more women in power had little measurable impact on corruption, but that in more open, democratic political systems the change was noticeable.

LETS BE FRIENDS

Me gusta | A 457.176 personas les gusta esto.

Follow @Avaaz

GET BRIEFED!

Get the best stories and videos in your inbox daily.

Name

Email

Country

SUBSCRIBE TODAY ▸

MOST POPULAR | READ MORE

Agenda

- Definiciones
- Probabilidad Condicional
- Variables Aleatorias
- Vectores Aleatorios
- Esperanza y otros momentos
- Procesos Estocásticos

Proceso Estocástico

- Hay veces que lo importante no es un valor único, sino una sucesión temporal (aleatoria)
  - Cuántos paquetes hay en el buffer en cada instante t
  - Cuántas llamadas están siendo cursadas en cada instante t
- Un proceso estocástico le asigna a cada elemento del espacio muestral Ω una función en t
  - Cada elemento ω de Ω está asociado a una función $X_t(\omega)$
    - Para un valor de ω, $X_t(\omega)$ es una función temporal
    - Para un valor de t, $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria
  - La función $X_t(\omega)$ para un ω dado es llamado realización del proceso o trayectoria

Proceso Estocástico

- Espacio de estados
  - El conjunto de posibles valores que puede tomar $X_t(\omega)$ (continuo o discreto)
- Espacio de parámetros
  - El conjunto de posibles valores que puede tomar t (continuo o discreto)
- Algunos parámetros de interés:
  - Distribución en cada tiempo: la distribución de la v.a. X_t para un t dado
  - Distribución estacionaria: la distribución de la v.a. X_t cuando $t \longrightarrow \infty$ (si existe)

Proceso Estocástico

- Algunos parámetros de interés (cont…)
  - Estadísticas de orden n (o distribuciones finito-dimensionales)

$$F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1,\ldots,X_{t_n} \leq x_n)$$

    para todos los posibles conjuntos $\{t_1,\ldots,t_n\}$

  - Ejemplos:
    - Estadística de orden 1:
      - la distribución estacionaria
      - la esperanza para un *t* dado
    - Estadística de orden 2: la covarianza

$$R_{t,s} = E\{(X_t - \bar{X}_t)(X_s - \bar{X}_s)\}$$

Estacionario y Ergódico

- Proceso estacionario
  - El proceso es estacionario cuando las estadísticas de todos los órdenes permanecen incambiados por una traslación temporal

$$F_{X_{t_1+\tau},\ldots,X_{t_n+\tau}}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1,\ldots,x_n) \quad \forall n,\ \forall t_1,\ldots,t_n$$

  - Más sencillo de verificar es un proceso estacionario en el sentido amplio (la media y la covarianza son invariantes)

$$\bar{X}_t = \text{constante}, \quad R_{t+\tau,s+\tau} = R_{t,s}\ \forall \tau$$

- Proceso ergódico
  - La estadística de $X_t(\omega)$ para un ω dado es la misma que la de X_t para un t dado
  - Consecuencia práctica: con una única realización (infinita) del proceso puedo obtener toda la estadística de X_t
  - Ergódico => Estacionario (No al revés, ¿ejemplo de un proceso estacionario pero no ergódico?)

Bibliografía

- Gran parte de la presentación está basado en el libro “Teoría de Probabilidad” de Valentín V. Petrov y Ernesto Mordecki, editorial DIRAC – Facultad de Ciencias, 2008.