SOLUCIÓN Problema 1, Antenas y Propagación. 1er. Parcial xx/07/20

1a)

Ver en el teórico Sección 2.4.

Se debe llegar a:

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu(\epsilon-\alpha)\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t}=0 \quad , \quad \nu=\sqrt{\mu(\epsilon-\alpha)}$$

Trabajando con las unidades:

$$[\alpha][\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}]=[\vec{J}] \qquad [\alpha]\frac{V/m}{s}=\frac{A}{m^2}$$

=> $[\alpha]=\frac{A \cdot s}{V \cdot m}=\frac{F}{m}=\frac{s}{\Omega \cdot m}$ Notar que coincide con las unidades de ϵ

1b) Trabajando con fasores, la ecuación anterior queda:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_0}{\partial^2 x}+\gamma^2 \vec{H}_0=0$$

con $\gamma^2=\mu(\epsilon-\alpha)\omega^2$

Es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden cuyas soluciones están dadas por:

$$\vec{H}_0(x)=\vec{C}_1 e^{-\gamma x}+\vec{C}_2 e^{\gamma x}$$

1c) El exponente de la exponencial puede ser real o imaginario puro según la relación entre ϵ y α.

i) $\epsilon > \alpha$

$$\gamma=\omega\sqrt{\mu(\epsilon-\alpha)}$$

$$\vec{H}(x,y,z,t)=\vec{C}_1 e^{-\omega\sqrt{\mu(\epsilon-\alpha)}x}e^{j\omega t}+\vec{C}_2 e^{\omega\sqrt{\mu(\epsilon-\alpha)}x}e^{j\omega t}$$

En este caso la solución no corresponde a una onda viajera, entonces no es de interés para nosotros.

ii) $\epsilon < \alpha$

$$\gamma=j\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}$$

$$\vec{H}(x,y,z,t)=\vec{C}_1 e^{j(\omega t-\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x)}+\vec{C}_2 e^{j(\omega t+\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x)}$$

En este otro caso, cada sumando es un campo que se propaga sin atenuación en la dirección x. El primer término corresponde a propagación en sentido de las x positivas mientras que el segundo término corresponde a la propagación en el sentido de las x negativas. Las constantes vectoriales complejas $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ quedan determinadas por las condiciones de borde del problema.

Iii) $\epsilon = \alpha$

$\gamma = 0$

En este caso particular se de tener en cuenta que la ecuación que verifica H cambia por:

$$\nabla^2 \vec{H} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \vec{H}_0(x)}{\partial^2 x} = 0$$
$$H_0(x) = \vec{C}_1 x + \vec{C}_2$$
$$H(x, y, z, t) = (\vec{C}_1 x + \vec{C}_2) e^{j\omega t}$$

Esta ya no es la ecuación de onda, y por lo tanto la solución no tiene la forma planteada en los casos i) y ii). Se puede probar que para ser solución de las ecuaciones de Maxwell $\vec{C}_1 = \vec{0}$

Esto muestra que para verificar las ecuaciones de Maxwell los campos deben ser homogéneos:

$\boxed{\vec{H} = \vec{C}_2 e^{j\omega t}}$. Esto tampoco modela una situación de interés físico, por tanto se descarta y no es necesario calcular $\vec{E}$.

1d)

En caso de haber propagación:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu(\alpha - \epsilon)}$$
$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{C}_1 e^{j(\omega t - \omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x)} + \vec{C}_2 e^{j(\omega t + \omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x)}$$

Usando la ley de Ampere llegamos a la expresión para E:

$$\nabla \wedge \vec{H} = -\alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\left(\frac{\partial H_{0_y}}{\partial x}\hat{k} - \frac{\partial H_{0_z}}{\partial x}\hat{j}\right) e^{j\omega t} = j(\epsilon - \alpha)\omega \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$
$$(-\gamma C_{1_y} e^{-\gamma x} + \gamma C_{2_y} e^{\gamma x})\hat{k} - (-\gamma C_{1_z} e^{-\gamma x} + \gamma C_{2_z} e^{\gamma x})\hat{j} = j(\epsilon - \alpha)\omega(E_{0_x}\hat{i} + E_{0_y}\hat{j} + E_{0_z}\hat{k})$$

Igualando términos componente a componente:

$$\boxed{\begin{gathered} E_{0_x} = 0 \\ E_{0_y} = \sqrt{\mu/(\alpha-\epsilon)}\left(-C_{1_z} e^{-j\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x} + C_{2_z} e^{j\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x}\right) \\ E_{0_z} = \sqrt{\mu/(\alpha-\epsilon)}\left(C_{1_y} e^{-j\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x} - C_{2_y} e^{j\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x}\right) \end{gathered}}$$

1e) La onda que se propaga en sentido creciente de las **x** es la correspondiente a la constante $\vec{C}_1$:

$$\vec{H}=\vec{C}_1 e^{j(\omega t-\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x)}$$
$$\vec{E}=\sqrt{\mu/(\alpha-\epsilon)}(-C_{1_z}\hat{j}+C_{1_y}\hat{k})e^{j(\omega t-\omega\sqrt{\mu(\alpha-\epsilon)}x)}$$

Partiendo de que la relación entre los campos (en amplitud y dirección) se puede expresar como $\boxed{\vec{E}=\vec{u}\wedge\vec{H}}$

Dado que $\vec{E}$ no tiene componente según $\hat{i}$ la única forma es que esto sea posible para cualquier valor de $\vec{C}_1$ es que $\vec{u}=u_x\hat{i}$

Si

$$\vec{E}=\vec{u}\wedge\vec{H}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_x & 0 & 0\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=-H_z u_x\hat{j}+H_y u_x\hat{k}=u_x(-C_{1_z}\hat{j}+C_{1_y}\hat{k})$$

$$u_x=\sqrt{\mu/(\alpha-\epsilon)} \quad => \quad \vec{u}=\sqrt{\mu/(\alpha-\epsilon)}\hat{i}$$

Esto muestra que $\dfrac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}=\sqrt{\mu/(\alpha-\epsilon)}$

Observar que todavía no se mostró que $\vec{H}$ sea transversal a la dirección de propagación, solo se mostró la relación entre las direcciones y magnitudes de los campos.

1f)

Partiendo de la Ley de Faraday se puede mostrar que el campo magnético tampoco puede tener una componente en la dirección de propagación. Se trata de una onda plana uniforme donde los campos son transversales a la dirección de propagación:

$$\begin{gathered}\nabla\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \left(\frac{\partial E_{0_y}}{\partial x}\hat{k}-\frac{\partial E_{0_z}}{\partial x}\hat{j}\right)e^{j\omega t}=j\mu\vec{H}_0 e^{j\omega t}\end{gathered} \quad => \quad H_{0_x}=0 \quad => \quad \begin{gathered}C_{1_x}=0\\ C_{2_x}=0\end{gathered}$$

Esto permite afirmar la ortogonalidad mutua entre los campos y la dirección de propagación aplicando la relación entre $\vec{H}$ y $\vec{E}$ y la propiedad del triple producto vectorial escalar $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{A})=0$

$$\boxed{\begin{gathered}\hat{i}\cdot\vec{H}=\hat{i}\cdot(C_{1_y}\hat{j}+C_{1_z}\hat{k})=C_{1_y}\hat{i}\cdot\hat{j}+C_{1_z}\hat{i}\cdot\hat{k}=0\\ \hat{i}\cdot\vec{E}=\hat{i}\cdot(u_x\hat{i}\wedge\vec{H})=-u_x(\hat{i}\cdot\{\vec{H}\wedge\hat{i}\})=0\\ \vec{E}\cdot\vec{H}=(u_x\hat{i}\wedge\vec{H})\cdot\vec{H}=u_x(\vec{H}\cdot\{\hat{i}\wedge\vec{H}\})=0\end{gathered}}$$