2ndo Parcial 2018 Prob 1

1b) El campo de una fuente isotrópica cuya polarización es lineal según $\hat{e}_\theta$ se puede expresar como: $\boldsymbol{E}=E(I_0)e^{j\phi_i}\dfrac{e^{-jkr}}{r}\hat{e}_\theta$, donde $E(I_0)$ es una función del módulo de la corriente y ϕ_i representa la dependencia con la fase de la corriente de alimentación.

Considerando las siguientes aproximaciones por tratarse de campo lejano:

$\theta_i \simeq \theta$ Para variaciones de amplitud: $r_i \simeq r$

Para variaciones de fase:

$$r_3 \simeq r-\frac{d}{2}\cos\theta \qquad r_4 \simeq r+\frac{d}{2}\cos\theta$$

$$r_2 \simeq r-\frac{3}{2}d\cos\theta \qquad r_5 \simeq r+\frac{3}{2}d\cos\theta$$

$$r_1 \simeq r-\frac{5}{2}d\cos\theta \qquad r_6 \simeq r+\frac{5}{2}d\cos\theta$$

El campo total, considerando una diferencia de fase de β en la excitación de elementos adyacentes es:

$$\boldsymbol{E}=E(I_0)\frac{e^{-jkr}}{r}\left(e^{-j\frac{5}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{-j\frac{3}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{-j\frac{1}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{+j\frac{1}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{+j\frac{3}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{+j\frac{5}{2}(kd\cos\theta+\beta)}\right)\hat{e}_\theta$$

Extrayendo la expresión del campo de la antena individual, el AF queda:

$$AF=e^{-j\frac{5}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{-j\frac{3}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{-j\frac{1}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{+j\frac{1}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{+j\frac{3}{2}(kd\cos\theta+\beta)}+e^{+j\frac{5}{2}(kd\cos\theta+\beta)}$$

Tomando $\Psi=kd\cos\theta+\beta$ y $e^{-j\frac{5}{2}\Psi}$ como factor común:

$$AF=e^{-j\frac{5}{2}\Psi}\left[1+e^{j\Psi}+e^{j2\Psi}+e^{j3\Psi}+e^{j4\Psi}+e^{j5\Psi}\right]$$

Usando el dato de la letra: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}e^{nx}=\frac{e^{Nx}-1}{e^{x}-1}$, queda entonces:

$$AF=e^{-j\frac{5}{2}\Psi}\frac{e^{j6\Psi}-1}{e^{j\Psi}-1}=e^{-j\frac{5}{2}\Psi}\frac{e^{j3\Psi}}{e^{j\frac{\Psi}{2}}}\cdot\frac{e^{j3\Psi}-e^{-j3\Psi}}{e^{j\frac{\Psi}{2}}-e^{-j\frac{\Psi}{2}}}=e^{-j\frac{5}{2}\Psi}e^{j\frac{5}{2}\Psi}\frac{\sin 3\Psi}{\sin\frac{\Psi}{2}}=\frac{\sin 3\Psi}{\sin\frac{\Psi}{2}}$$

$$AF=\frac{\sin 3\Psi}{\sin\frac{\Psi}{2}}\simeq\frac{\sin 3\Psi}{\frac{\Psi}{2}}$$ para ψ chico

Se plantea a continuación el desarrollo de la expresión para un array genérico de N=2M elementos simétricos respecto al origen, pendiente en el práctico.

Las expresiones para las distancias y fase para cada elemento i son:

$$r_i=\begin{cases} r-(i-\frac{1}{2})d\cos(\theta),\ \ i=1,\ldots,M,\ \ (y>0) \\ r+(i-\frac{1}{2})d\cos(\theta),\ \ i=1,\ldots,M,\ \ (y<0) \end{cases}$$

$$\phi_i=\begin{cases} (i-\frac{1}{2})\beta,\ \ i=1,\ldots,M,\ \ (y>0) \\ -(i-\frac{1}{2})\beta,\ \ i=1,\ldots,M,(y<0) \end{cases}$$

El campo eléctrico total es entonces:

$$\boldsymbol{E}=E(I_0)\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{e}_\theta\left(\sum_{i=1}^{M}e^{j(i-\frac{1}{2})(kd\cos\theta+\beta)}+\sum_{i=1}^{M}e^{-j(i-\frac{1}{2})(kd\cos\theta+\beta)}\right)$$

donde la primera suma es para los elementos en $y>0$ y la segunda para $y<0$.

El array factor queda, tomando $\Psi=kd\cos\theta+\beta$:

$$AF=\sum_{i=1}^{M}e^{j(i-\frac{1}{2})\psi}+\sum_{i=1}^{M}e^{-j(i-\frac{1}{2})\psi}$$

$$AF=e^{-j\frac{1}{2}\psi}\sum_{i=1}^{M}e^{ji\psi}+e^{j\frac{1}{2}\psi}\sum_{i=1}^{M}e^{-ji\psi}$$

Usando la expresión (diferente de la de la letra del parcial) $\sum_{n=1}^{N}e^{nx}=e^x\frac{e^{Nx}-1}{e^x-1}$, queda entonces:

$$AF=e^{-j\frac{1}{2}\psi}\frac{e^{j\psi}(e^{jM\psi}-1)}{e^{j\psi}-1}+e^{j\frac{1}{2}\psi}\frac{e^{-j\psi}(e^{-jM\psi}-1)}{e^{-j\psi}-1}$$

$$AF=e^{-j\frac{1}{2}\psi}\frac{e^{-j\frac{1}{2}\psi}}{e^{-j\frac{1}{2}\psi}}\frac{e^{j\psi}(e^{jM\psi}-1)}{e^{j\psi}-1}+e^{j\frac{1}{2}\psi}\frac{e^{j\frac{1}{2}\psi}}{e^{j\frac{1}{2}\psi}}\frac{e^{-j\psi}(e^{-jM\psi}-1)}{e^{-j\psi}-1}$$

$$AF=\frac{e^{jM\psi}-1}{e^{j\frac{1}{2}\psi}-e^{-j\frac{1}{2}\psi}}+\frac{e^{-jM\psi}-1}{e^{-j\frac{1}{2}\psi}-e^{j\frac{1}{2}\psi}}=\frac{e^{jM\psi}-e^{-jM\psi}}{e^{j\frac{1}{2}\psi}-e^{-j\frac{1}{2}\psi}}=\frac{\operatorname{sen}(\frac{N\psi}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\psi}{2})}$$

Para el caso N=6 del problema se llega a la expresión dada.