

SOLUCIÓN PROBLEMA 1 PRIMER PARCIAL 2018 (04/05/2018)

1a)

Ver en el teórico Sección 2.4.

Se debe llegar a:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \gamma^2 \vec{E}$$

$$\text{con } \gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$$

Análogo para \vec{H} .

1b)

Si $\beta > 0 \Rightarrow \alpha > 0$ se trata de una onda plana uniforme (OPU) que se propaga hacia z creciente y se atenúa al avanzar en ese sentido.

Si $\beta < 0 \Rightarrow \alpha < 0$ se trata de una OPU que se propaga hacia z decreciente y se atenúa al avanzar en ese sentido.

El caso $\gamma = 0$ no tiene interés.

1c) Para hallar la relación entre B_x y C_y se sustituye las expresiones de los campos en la ecuación de la Ley de Ampere o la Ley de Faraday:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ -\gamma B_x e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \hat{j} &= -j\omega\mu C_y e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \hat{j} \end{aligned}$$

$$\frac{B_x}{C_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

1d) Se trata de polarización lineal (porque solo hay componente de campo eléctrico en una dirección) según \hat{i} .

1e) Se parte del vector de Poyting de unidades W/m².

$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ y considerando los campos reales y promediando en un período de oscilación se llega a:

$$\begin{aligned} \bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E} \wedge \vec{H}^* \} \\ \bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2} \Re \{ B_x e^{-\alpha z - j(\beta z - \omega t)} \hat{i} \wedge C_y^* e^{-\alpha z + j(\beta z - \omega t)} \hat{j} \} \\ \bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2} \Re \{ B_x C_y^* \} e^{-2\alpha z} \hat{k} \end{aligned}$$

1f) Pérdida de potencia debida a la resistencia del metal (Efecto Joule).

2a) Ver teórico.

2b) Partiendo de que la solución de los campos dentro de la guía tiene la forma genérica:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0(x, y) e^{-\tau z} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0(x, y) e^{-\tau z} e^{j(\omega t - \beta z)}\end{aligned}$$

De aquí la potencia media transmitida a través de una sección rectangular de la guía es:

$$\bar{P}(z) = \frac{1}{2} \iint_A \Re \{ \vec{E} \wedge \vec{H}^* \} \cdot d\vec{A} = \left\{ \frac{1}{2} \iint_A \Re \{ \vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0^* \} \cdot d\vec{A} \right\} e^{-2\tau z} = \bar{P}(0) e^{-2\tau z}$$

Derivando en z:

$$\frac{\partial \bar{P}(z)}{\partial z} = -2\tau \bar{P}(0) e^{-2\tau z} = -2\tau \bar{P}(z)$$

Finalmente se puede calcular para cierto z la atenuación conociendo la potencia media perdida por unidad de longitud (potencia disipada) y la potencia media transmitida en z.

$$\tau = - \frac{\partial \bar{P}(z)}{\partial z} \frac{1}{2\bar{P}(z)}$$

2c) Se utiliza la expresión final encontrada en 2b substituyendo los términos por las integrales que permiten calcularlos usando las expresiones aproximadas de los campos para el caso en que no hay atenuación:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)}\end{aligned}$$

$$\bar{P}_{loss} = - \frac{\partial \bar{P}(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} R_s \oint_{\partial A} |J_s|^2 ds = \frac{1}{2} R_s \oint_{\partial A} |\vec{H}_{0_Tangencial}|^2 ds$$

Donde $\vec{H}_{0_Tangencial}$ es la componente tangencial de la intensidad magnética contra las paredes de la guía en su interior y la integral se realiza sobre una sección de paredes de la guía de longitud una unidad.

$$\bar{P}_{tx} = \bar{P}(z) = \frac{1}{2} \iint_A |\vec{E}_{0_Trans}(z)| |\vec{H}_{0_Trans}(z)| dA$$

Donde \vec{E}_{0_Trans} y \vec{H}_{0_Trans} son las componentes perpendiculares a la dirección z del campo eléctrico y de la intensidad magnética respectivamente. La integral de área se realiza sobre el área transversal a la guía.

$$\tau = \frac{R_s \oint_{\partial A} |\vec{H}_{0_Tangencial}|^2 ds}{\iint_A |\vec{E}_{0_Trans}(z)| |\vec{H}_{0_Trans}(z)| dA}$$

2d) La sección de la guía (para que trabaje en modos m,n pequeños, de ser posible en el modo dominante) y máxima conductividad posible del metal. Es decir dado f_T , elegir la sección de la guía para que la frecuencia de corte (f_c) correspondiente al modo dominante esté inmediatamente por debajo de f_T . Que esté muy por debajo de f_T no sirve porque entonces f_c es más baja de lo que necesito y por tanto la sección de la guía (y el material que esta insume) es mayor innecesariamente.