Análisis y control de sistemas no lineales

Primer semestre - 2025

Hoja 2 de ejercicios - Fecha de entrega: **viernes 25 de abril**.

Las referencias son al libro *Nonlinear Systems*, H. Khalil (1996).

Ejercicio 1

Método de Krasovskii (Kh,3.9). Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$, $f(0) = 0$ y

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

Supongamos que existe una matriz P simétrica, definida positiva, tal que

$$P.A(x) + A^T(x).P \leq -I \quad , \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

1. Mostrar que el origen es locamente estable y que

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leq -x^T x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

(Sugerencia: usar que $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma$)

2. Mostrar que la función $V(x) = f^T(x) P f(x)$ es no negativa, sólo se anula en $x = 0$ y es radialmente no acotada.

3. Mostrar que el origen es globalmente asintóticamente estable.

Ejercicio 2

(Kh, 3.15) Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \, sat\left(x_2^2 - x_3^2\right) \\ \\ \dot{x}_3 &= x_3 \, sat\left(x_2^2 - x_3^2\right) \end{cases}$$

1. Mostrar que 0 es el único equilibrio.

2. Usando $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ y el Teorema de LaSalle, mostrar que es globalmente asintóticamente estable.

Ejercicio 3

(Kh, 3.24) Sea el sistema lineal de control

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

donde x es el estado, u es la acción de control, y es la salida y A, B, C y D son matrices de dimensiones adecuadas. Si el par (A, C) es *observable*, entonces

$$C.e^{At}x \equiv 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 0$$

Considerando un sistema observable, mostrar que A es Hurwitz si y sólo si existe una matriz P simétrica y definida positiva tal que $A^T P + PA = -C^T C$.

Ejercicio 4

Sea el sistema dinámico que representa la evolución de la población de zorros (x_2) y conejos (x_1) dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \quad ax_1 - cx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + dx_1x_2 \end{cases}$$

con las constantes a, b, c y d positivas.

1. Determinar los puntos de equilibrio

2. Clasificar los mismos utilizando linealización

A partir de ahora utilizar las siguientes constantes:

$$a = 1\ ,\ b = 0{,}75\ ,\ c = 0{,}5\ ,\ d = 0{,}25$$

3. Utilizando el Método de las Isóclinas, dibujar el retrato de fase del sistema (considere sólo el primer cuadrante). Verificar utilizando la función **quiver** de Matlab.

4. Verificar que la expresión

$$0{,}75ln(x_1) + ln(x_2) - 0{,}5x_2 - 0{,}25x_1$$

es constante sobre las trayectorias.

5. Plotear dicha expresión para algunos valores constantes, verificando que se obtienen curvas cerradas que encierran al punto crítico no trivial.

6. Estudiar la evolución de x_1 y x_2 a lo largo de una trayectoria para condiciones iniciales cercanas al punto fijo no trivial, utilizando simulación numérica y la solución analítica, y determinar el periodo de la oscilación, verificando que x_1 *adelanta* a x_2 en un cuarto de periodo.

7. ¿Cuándo es mejor liberar la caza de predadores?

Para los siguientes ejercicios, se sugiere utilizar las funciones bode.m y nyquist.m de Matlab o las equivalentes en otros paquetes de resoluci´ón numérica.

Ejercicio 5

Bosqueje los Diagramas de Nyquist de las siguientes transferencias:

1. $$H_1(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \quad , \quad \omega_0 > 0$$

2. $$H_2(s) = \frac{s}{s + \omega_0} \quad , \quad \omega_0 > 0$$

3. $$H_3(s) = \frac{\omega_0}{s(s + \omega_0)} \quad , \quad \omega_0 > 0$$

4. $$H_4(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad \omega_n > 0, 0 < \zeta < 1$$

5. $$H_5(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \frac{\omega_n}{10}\right)\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)} \quad , \quad \omega_n > 0, 0 < \zeta < 1$$

Ejercicio 6

Se consideran las transferencias del ejercicio anterior. Estudie la estabilidad de un sistema en lazo cerrado aplicando el Criterio de Nyquist, cuando el denominador en lazo cerrado es de la forma $1 + K.H_i(s) = 0$. Discutir para todo K real no nulo.