

# Análisis y control de sistemas no lineales

Primer semestre - 2023

Hoja 2 de ejercicios - Fecha de entrega: **Martes 25 de abril.**

Las referencias son al libro *Nonlinear Systems*, H. Khalil (1996).

## Ejercicio 1

**Método de Krasovskii** (Kh,3.9). Consideremos el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , con  $f \in C^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$ ,  $f(0) = 0$  y

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Supongamos que existe una matriz  $P$  simétrica, definida positiva, tal que

$$P.A(x) + A^T(x).P \leq -I \quad , \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

1. Mostrar que

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leq -x^T x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

(Sugerencia: usar que  $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma$ )

2. Mostrar que la función  $V(x) = f^T(x) P f(x)$  es no negativa, sólo se anula en  $x = 0$  y es radialmente no acotada.
3. Mostrar que el origen es globalmente asintóticamente estable.

## Ejercicio 2

(Kh, 3.15) Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \operatorname{sat}(x_2^2 - x_3^2) \\ \dot{x}_3 = x_3 \operatorname{sat}(x_2^2 - x_3^2) \end{cases}$$

1. Mostrar que 0 es el único equilibrio.
2. Usando  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$  y el Teorema de LaSalle, mostrar que es globalmente asintóticamente estable.

## Ejercicio 3

(Kh, 3.24) Sea el sistema lineal de control

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

donde  $x$  es el estado,  $u$  es la acción de control,  $y$  es la salida y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son matrices de dimensiones adecuadas. Si el par  $(A, C)$  es *observable*, entonces

$$C.e^{At}x \equiv 0 \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$$

Considerando un sistema observable, mostrar que  $A$  es Hurwitz si y sólo si existe una matriz  $P$  simétrica y definida positiva tal que  $A^T P + PA = -C^T C$ .

#### Ejercicio 4

Sea el sistema dinámico que representa la evolución de la población de zorros ( $x_2$ ) y conejos ( $x_1$ ) dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 - cx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + dx_1x_2 \end{cases}$$

con las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  positivas.

1. Determinar los puntos de equilibrio
2. Clasificar los mismos utilizando linealización

A partir de ahora utilizar las siguientes constantes:

$$a = 1, b = 0,75, c = 0,5, d = 0,25$$

3. Utilizando el Método de las Isóclinas, dibujar el retrato de fase del sistema (considere sólo el primer cuadrante). Verificar utilizando la función **quiver** de Matlab.
4. Verificar que la expresión

$$0,75\ln(x_1) + \ln(x_2) - 0,5x_2 - 0,25x_1$$

es constante sobre las trayectorias.

5. Plotear dicha expresión para algunos valores constantes, verificando que se obtienen curvas cerradas que encierran al punto crítico no trivial.
6. Estudiar la evolución de  $x_1$  y  $x_2$  a lo largo de una trayectoria para condiciones iniciales cercanas al punto fijo no trivial, utilizando simulación numérica y la solución analítica, y determinar el periodo de la oscilación, verificando que  $x_1$  *adelanta* a  $x_2$  en un cuarto de periodo.
7. ¿Cuándo es mejor liberar la caza de predadores?

Para los siguientes ejercicios, se sugiere utilizar las funciones `bode.m` y `nyquist.m` de Matlab o las equivalentes en otros paquetes de resolución numérica.

### Ejercicio 5

Bosqueje los Diagramas de Nyquist de las siguientes transferencias:

1.

$$H_1(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \quad , \quad \omega_0 > 0$$

2.

$$H_2(s) = \frac{s}{s + \omega_0} \quad , \quad \omega_0 > 0$$

3.

$$H_3(s) = \frac{\omega_0}{s(s + \omega_0)} \quad , \quad \omega_0 > 0$$

4.

$$H_4(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad \omega_n > 0, 0 < \zeta < 1$$

5.

$$H_5(s) = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \frac{\omega_n}{10}\right) (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad , \quad \omega_n > 0, 0 < \zeta < 1$$

### Ejercicio 6

Se consideran las transferencias del ejercicio anterior. Estudie la estabilidad de un sistema en lazo cerrado aplicando el Criterio de Nyquist, cuando el denominador en lazo cerrado es de la forma  $1 + K.H_i(s) = 0$ . Discutir para todo  $K$  real no nulo.