

## Práctico 1

### Asistentes de pruebas para lógicos y matemáticos Cálculo Proposicional

#### Objetivos

Adquirir el manejo básico de conectivos y de tácticas. Familiarizarse con el ambiente de pruebas Coq.

#### Lógica Minimal

Usa `intro(s)`, `apply`, `assumption` (entre otros).

**Ejercicio 1.1.** Demuestre en Coq los siguientes teoremas  $I$ ,  $K$  y  $S$ .

1.  $A \rightarrow A$
2.  $A \rightarrow B \rightarrow A$
3.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

**Ejercicio 1.2.** Demuestre en Coq los siguientes teoremas.

1.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$
2.  $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$

**Ejercicio 1.3.** Construya dos pruebas diferentes para los siguientes teoremas:

1.  $A \rightarrow A \rightarrow A$
2.  $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow C$ .

#### Cálculo Proposicional Constructivo

Usa `split`, `left`, `right`, `absurd`, `elim`, `unfold` (entre otros).

Recuerde que  $\sim A$  es una abreviación de  $A \rightarrow \text{False}$ , y  $A \leftrightarrow B$  es una abreviatura de  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ .

**Ejercicio 1.4.** Demuestre en Coq los siguientes teoremas:

1.  $A \rightarrow \sim \sim A$ . (Sugerencia: usar `unfold not`)
2.  $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
3.  $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$
4.  $A \rightarrow (A \vee B)$
5.  $B \rightarrow (A \vee B)$
6.  $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$
7.  $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
8.  $\text{False} \rightarrow A$

**Ejercicio 1.5.** Demuestre en Coq los siguientes teoremas:

1.  $(A \rightarrow B) \rightarrow \sim B \rightarrow \sim A$
2.  $\sim(A \wedge \sim A)$
3.  $(A \rightarrow B) \rightarrow \sim(A \wedge \sim B)$
4.  $(A \wedge B) \rightarrow \sim(A \rightarrow \sim B)$
5.  $\sim A \wedge \sim \sim A \rightarrow \text{False}$ .

**Ejercicio 1.6.** Demuestre en Coq los siguientes teoremas:

1.  $A \vee B \rightarrow \sim(\sim A \wedge \sim B)$
2.  $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
3.  $A \vee B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

## Cálculo Proposicional Clásico

Usa `cut`, `exact` (entre otros).

Las tácticas definidas hasta el momento sólo nos permiten probar teoremas de la Lógica Constructiva. Para poder trabajar en lógica Clásica, debemos agregar algún axioma que permita derivar resultados clásicos. El axioma clásico por excelencia es la fórmula  $A \vee \sim A$ .

**Ejercicio 1.7.** Demuestre en Coq los siguientes teoremas de la lógica clásica:

1.  $A \vee \sim A \rightarrow \sim \sim A \rightarrow A$
2.  $A \vee \sim A \rightarrow (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
3.  $(A \vee \sim A) \rightarrow \sim(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$  (de Morgan  $\rightarrow$ )

## Notas

Observe que en todos los teoremas anteriores debimos agregar como antecedente a la fórmula  $A \vee \sim A$ . Para poder utilizar esta fórmula como un axioma y no tener que explicitarla en cada teorema, escriba la siguiente secuencia de comandos en Coq:

```
Require Import Classical.  
Check classic.
```

El primero de estos comandos carga el archivo `Classical`, que es el que se usa para trabajar con Lógica Clásica, y el tercero informa el tipo del axioma `classic`, que se encuentra definido en el archivo `Classical`. Este axioma es de tipo (forall P: Prop, P ∨ ∼P). Esto debe leerse del siguiente modo: *Para toda proposición P, se cumple P ∨ ∼P.*

Observe que todos los teoremas probados hasta ahora deben considerarse como *esquemas* de teoremas, ya que se cumplen para cualquier instanciación de las variables A, B y C. La forma de indicar en Coq que una fórmula es un esquema es justamente cuantificando universalmente a las variables proposicionales que aparecen en ella.

En general, (forall x:A, B) se lee como *Para todo x en A, se cumple B*, y x puede aparecer en B.

**Ejercicio 1.8.** Utilizando ahora el axioma `classic` demuestre la siguiente reformulación de los ejercicios del punto 1.7. Para aplicar el axioma `classic` debe instanciarlo explícitamente en la fórmula que necesite. Por ejemplo, para instanciar `classic` con la proposición  $\sim A$  escriba: `(classic ~A)`. En el ejemplo, `(classic ~A) : ~A ∨ ~~A`.

1. forall A: Prop,  $\sim\sim A \rightarrow A$
2. forall A B: Prop,  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
3. forall A B: Prop,  $\sim(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$

### Ejemplos de Traducción al Lenguaje Lógico

**Ejercicio 1.9.** Formalice y demuestre la validez del siguiente razonamiento en Coq, sin usar tácticas automáticas:

- **Hip.1:** Una base de datos no está normalizada o no presenta redundancia de información.
- **Hip.2:** Una base de datos es consistente o no es útil.
- **Tesis:** Si una base de datos está normalizada y es útil, entonces es consistente y no presenta redundancia de información.

**Ejercicio 1.10.** Demuestre algunos ejercicios de las dos primeras secciones utilizando la táctica automática `tauto`. Observe que los teoremas de la lógica clásica no se pueden demostrar con esta táctica.

**Ejercicio 1.11.** Considere el siguiente problema: Un club escocés tiene las siguientes reglas para aceptar a sus miembros:

- Regla 1:* Todo no escocés debe usar medias rojas.
- Regla 2:* Todo miembro usa kilt o no usa medias rojas.
- Regla 3:* Los miembros casados no salen los domingos.
- Regla 4:* Un miembro sale los domingos si y sólo si es escocés.
- Regla 5:* Todo miembro que usa kilt es escocés y es casado.
- Regla 6:* Todo miembro escocés usa kilt.

1. Formalice el problema en Coq.
2. Observe que con las reglas previas nadie puede ser aceptado. Para justificar formalmente esto pruebe que las reglas son contradictorias:
  - i) sin usar tácticas automáticas.
  - ii) usando la táctica `tauto`.

**Ejercicio 1.12.** Considere las siguientes reglas extraídas de un manual de patología:

- Regla 1:* Si el paciente tiene fiebre o el paciente tiene la piel amarillenta, entonces tiene hepatitis o rubeola.
- Regla 2:* El paciente no tiene rubeola o tiene fiebre.

*Regla 3:* Si el paciente tiene hepatitis, pero no la rubeola, entonces tiene la piel amarillenta.

En el momento del examen clínico, usted observa los siguientes hechos:

- El paciente no tiene la piel amarillenta.
- El paciente tiene fiebre.

Establezca el diagnóstico y demuestre en *Coq* que éste es correcto.

### **Ejercicios a entregar:**

**Ver la fecha límite y los ejercicios requeridos en el sitio EVA del curso.**

*El archivo a entregar debe cargar correctamente en Coq. Si deja ejercicios sin resolver, debe delimitarlos como comentarios: (\* ... \*).*

*Al inicio del archivo deben estar los datos de cada integrante; se admiten entregas individuales o de a dos estudiantes.*

*Usar la plantilla publicada junto con el práctico para el desarrollo de los ejercicios requeridos; no es necesario entregar los ejercicios no solicitados.*