Análisis y control de sistemas no lineales

Primer semestre - 2025

Hoja 1 de ejercicios - Fecha de entrega: **lunes 31 de marzo**.

Las referencias son al libro *Nonlinear Systems*, de H. Khalil, Ed. 1996.

Ejercicio 1

i) Considere el sistema lineal de segundo orden $\dot{x} = Ax$, con A invertible, por lo que el origen es el único punto de equilibrio. Dibuje los diagramas de fase correspondientes a los siguientes tipos de punto de equilibrio, indicando en cada caso si el punto de equilibrio es inestable, estable o asintóticamente estable:
(a) nodo estable (b) nodo inestable (c) foco estable (d) foco inestable (e) centro (f) silla

ii) ¿Qué cosas pueden pasar en el caso en que A no sea invertible?

Ejercicio 2

Se tiene el siguiente sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - sat(2x_1 + x_2) \end{array} \right.$, siendo *sat* la siguiente función real:

$$sat(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & , & \alpha > 1 \\ \alpha & , & |\alpha| < 1 \\ -1 & , & \alpha < -1 \end{array} \right.$$

i) Linealizando, mostrar que el origen es asintóticamente estable.

ii) Mostrar que las trayectorias que se originan en el primer cuadrante, a la derecha de la curva $x_1x_2 = c$, con c suficientemente grande, no pueden llegar al origen. (Estudiar la variación sobre las trayectorias de la función $\mathcal{V}(x) = x_1x_2$ en la curva $x_1x_2 = c$, hallando $\dot{\mathcal{V}}$, y verificar que siempre es positiva si c es suficientemente grande.)

iii) Mostrar que el origen no es globalmente asintóticamente estable.

Ejercicio 3

Este ejercicio se basa en la descripción del péndulo simple del Capítulo 1 del Khalil.

i) Para un péndulo simple *con fricción y torque forzante*, escribir el modelo en variables de estado.

De ahora en más consideramos el caso *sin torque forzante*.

ii) Hallar los puntos de equilibrio.

iii) Estudiar la estabilidad de los mismos, mirando los valores propios del Jacobiano.

iv) Mostrar la estabilidad local del equilibrio *inferior*, usando la función de Lyapunov candidata

$$V(x) = \frac{g}{l}.(1 - cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$$

Considerar primero que no hay fricción y luego ver el caso con fricción (aquí hay que usar *LaSalle*).

v) Para el caso con fricción, mostrar que una función de Lyapunov candidata de la forma

$$V(x) = \frac{1}{2}.x^T Px + \frac{g}{l}.(1 - cos(x_1))$$

asegura la estabilidad asintótica, eligiendo $P = P^T > 0$ convenientemente.

Ejercicio 4

(Kh, 11.6) Realizar las partes a), b) y c) del Ejercicio 11.6 del Khalil. Tener presente que cuando refiere a *lazo abierto*, quiere decir que la acción de control es nula.

Ejercicio 5

(Kh, 10.32) Realizar el Ejercicio 10.32 del Khalil. Considerar una función de Lyapunov candidata de la forma

$$V(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i^2$$

Ejercicio 6

(Kh, 3.27) Sea el sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$. Consideremos el cambio de coordenadas $x = T(z)$ con T difeomorfismo en $\mathcal{R}^n$ y $T(0) = 0$. Consideremos el nuevo sistema

$$\dot{z} = \tilde{f}(z) \quad , \quad \tilde{f}(z) = \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]^{-1} . f[T(z)]$$

1. Mostrar que $x = 0$ es un punto de equilibrio aislado de $\dot{x} = f(x)$ si y sólo si $z = 0$ lo es para el sistema $\dot{z} = \tilde{f}(z)$.

2. Mostrar que si $V(x)$ es una función de Lyapunov local para $\dot{x} = f(x)$, entonces $\tilde{V}(z) = V[T(z)]$ lo es para el sistema $\dot{z} = \tilde{f}(z)$.

Ejercicio 7

Utilizando como candidata a función de Lyapunov una función cuadrática, clasificar completamente al origen como punto fijo del sistema en función de k **real**.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1\left(k^2 - x_1^2 - x_2^2\right) + x_2\left(k^2 + x_1^2 + x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 & = & -x_1\left(k^2 + x_1^2 + x_2^2\right) + x_2\left(k^2 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{array} \right.$$

Observar que para $k \neq 0$, es posible ver que las trayectorias que se inician suficientemente lejos del origen, se acercan a él, en tanto las que se inician cerca de él, tienden a alejarse.