Notas del curso de Ecuaciones Diferenciales

1 Introducción

Si Ω es una región abierta de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, decimos entonces que una ecuación de la forma

$$\dot{x} = f(t, x)$$

es una *ecuación diferencial ordinaria*. Aquí la incógnita x es una función derivable $x = \varphi(t)$ y $\dot{x}$ denota su derivada $d\varphi/dt$. Más precisamente, una *solución* de la ecuación diferencial es una función derivable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ definida en un intervalo abierto (finito o infinito) I, tal que para todo $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, y

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \ .$$

A veces, para explicitar el dominio, denotaremos (I, φ) a una solución φ definida sobre un intervalo I.

Si $(t_0, x_0) \in \Omega$, decimos que las soluciones que verifican $t_0 \in I$ y $\phi(t_0) = x_0$ son soluciones al *problema de Cauchy con la condición inicial* (t_0, x_0).

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} = 2tx^2 + \operatorname{sen}(t)\dot{x} \ .$$

Una función $x = \varphi(t)$ es solución de esta ecuación si y solo si el par $(x, y) = (\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ es solución del sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & 2tx^2 + \operatorname{sen}(t)y \end{array} \right.$$

Si definimos la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(t, (x, y)) \mapsto f(t, (x, y)) = (y, 2tx^2 + \operatorname{sen}(t)y)$$

entonces, llamando u al vector (x, y), el sistema es equivalente a la ecuación vectorial

$$\dot{u} = f(t, u) \ .$$

Observemos que en este caso dar una condición inicial $u_0 = u(t_0)$ equivale a dar para la ecuación de segundo orden los valores de $x(t_0)$ y $\dot{x}(t_0)$.

El problema de Cauchy para una condición inicial dada puede tener muchas (o infinitas) soluciones, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $\dot{x} = |\, x|^{1/2}$. El único punto de equilibrio para esta ecuación es el punto $x_0 = 0$, es decir, la única solución constante de esta ecuación es la solución $\varphi_0(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por otra parte, el método de separación de variables nos permite hallar la soluciones

$$\varphi_a^+ : (a, +\infty) \to (0, +\infty) \quad \varphi_a^+(t) = \frac{1}{4}(t-a)^2$$

$$\varphi_a^- : (-\infty, a) \to (-\infty, 0) \quad \varphi_a^-(t) = -\frac{1}{4}(t-a)^2$$

Pero entonces para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ podemos construir una solución φ definida en $\mathbb{R}$ como sigue: $\varphi(t) = \varphi_a^-(t)$ si $t < a$, $\varphi(t) = 0$ si $a \leq t \leq b$ y $\varphi(t) = \varphi_b^+(t)$ si $t > b$. Esto muestra que para esta ecuación el problema de Cauchy tiene infinitas soluciones para cualquier condición inicial.

Definición 1 (Unicidad de las soluciones). Diremos que el problema de Cauchy tiene *solución única de tamaño* $\epsilon > 0$ en (t_0, x_0) si existe

$$\varphi_\epsilon : I_\epsilon = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^n$$

solución por (t_0, x_0), es decir tal que $\varphi_\epsilon(t_0) = x_0$, con la siguiente propiedad: si (I, φ) es otra solución por (t_0, x_0) entonces $\varphi\,|_{I \cap I_\epsilon} = \varphi_\epsilon\,|_{I \cap I_\epsilon}$.

Evidentemente, si (I, φ) es una solución, entonces para cualquier intervalo abierto $J \subset I$ la restricción de φ a J es también solución. Nos interesaremos más adelante en las soluciones que no son la restricción de otra definida en un intervalo mayor; por ejemplo, las que están definidas en $\mathbb{R}$, o las que están definidas en un intervalo (a, b) pero tienden a infinito cuando $t \to b^+$ y cuando $t \to a^-$.

Definición 2 (Soluciones maximales). Decimos que una solución (I, φ) es una *extensión* de otra solución (J, ψ) cuando $J \subset I$ y $\varphi\,|_J = \psi$. Una solución (I, φ) es *maximal* cuando ella misma es su única extensión.

2 Existencia y unicidad de las soluciones

Las ecuaciones que estudiaremos corresponderán siempre a modelos deterministas de fenómenos evolutivos. Esto quiere decir que cada condición inicial determina completamente la evolución futura y el pasado de la evolución. En términos de soluciones de la ecuación, esto significa que para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución maximal al problema de Cauchy correspondiente. Veremos ahora condiciones suficientes para que una ecuación diferencial se corresponda a un modelo determinista. Comenzamos con un teorema de existencia.

Teorema 3 (Peano). *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe al menos una solución (I, φ) de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.*

El siguiente teorema, que asegura la unicidad de las soluciones, exige al segundo miembro de la ecuación verificar la condición de Lipschitz que definimos a continuación.

Definición 4 (Lipschitz). Diremos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *localmente Lipschitz respecto de la segunda variable* si para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una constante $K > 0$ y un entorno $U \subset \Omega$ de (t_0, x_0) tales que

$$\| f(t, y) - f(t, x) \| \leq K \, \| y - x \|$$

cada vez que los puntos (t, x) y (t, y) pertenezcan al entorno U.

Teorema 5 (Picard). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto conexo, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Entonces, existe un entorno $U \subset \Omega$ de (t_0, x_0) y $\epsilon > 0$ tal que para cada $(t_1, x_1) \in U$ el problema de Cauchy tiene solución única de tamaño ϵ para la condición inicial (t_1, x_1).*

En particular, toda función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 verifica las hipótesis del teorema de Picard (es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio). En el caso de la ecuación $\dot{x} = f(t, x) = |\, x|^{1/2}$ que vimos antes, las hipótesis del teorema de Picard son satisfechas en las regiones $\Omega^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ y $\Omega^- = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$; por esta razón, para las condiciones iniciales en estas regiones hay unicidad local de las soluciones.

Corolario 6 (Existencia y unicidad de la solución maximal). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ en las hipótesis del teorema de Picard. Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema de Cauchy correspondiente admite una única solución maximal. Es decir, existe un intervalo abierto $I(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}$ que contiene a t_0, y una solución maximal*

$$\varphi_{t_0,x_0} : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$$

tal que, para toda otra solución $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ que cumpla $\psi(t_0) = x_0$, necesariamente se tiene que $J \subset I(t_0, x_0)$ y que $\psi(t) = \varphi_{t_0,x_0}(t)$ para todo $t \in J$.

Demostración. Dada una condición inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$, llamamos $\mathcal{F}$ a la familia (no vacía) de soluciones de la ecuación diferencial que en t_0 toman el valor x_0. Es decir,

$$\mathcal{F} = \{(I, \varphi) \mid t_0 \in I\,,\ \varphi(t_0) = x_0\ \}\ .$$

Probaremos en primer lugar que dos soluciones arbitrarias en la familia $\mathcal{F}$ coinciden en la intersección de sus dominios. Sean (I_1, φ_1), (I_2, φ_2) dos soluciones en $\mathcal{F}$, y llamemos $J = I_1 \cap I_2$ a la intersección de sus dominios. Si definimos los conjuntos

$$A = \{t \in J \mid \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$$

$$B = \{t \in J \mid \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$$

entonces es claro que $J = A \cup B$ y que $A \cap B = \emptyset$. El teorema de Picard implica que el conjunto A es abierto, y la continuidad de las funciones φ_1 y φ_2 implica que el conjunto B es abierto. Tenemos entonces que el intervalo J es la unión disjunta de dos subconjuntos abiertos; pero entonces necesariamente uno de los conjuntos debe ser vacío. Como t_0 está en A, tiene que ser $B = \emptyset$ y $A = J$, es decir, φ_1 y φ_2 coinciden en J.

Definiremos ahora la solución maximal. Su dominio será la unión de todos los dominios de las soluciones en $\mathcal{F}$, es decir

$$I(t_0, x_0) = \bigcup_{(I,\varphi)\in\mathcal{F}} I$$

lo que nos asegura que la solución será maximal. Para definirla, observemos que si fijamos $t \in I(t_0, x_0)$, entonces por lo que demostramos previamente, todas las soluciones $(I, \varphi) \in \mathcal{F}$ tales que $t \in I$ toman el mismo valor en t. Podemos por lo tanto definir

$$\varphi_{t_0,x_0} : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$$
$$\varphi_{t_0,x_0}(t) = \varphi(t)$$

donde $(I, \varphi) \in \mathcal{F}$ es una solución arbitraria tal que $t \in I$. Resta probar que φ_{t_0,x_0} verifica la ecuación diferencial en todo punto $t \in I(t_0, x_0)$. Otra vez, si $t \in I(t_0, x_0)$, elegimos $(I, \varphi) \in \mathcal{F}$ tal que $t \in I$; pero entonces $\varphi_{t_0,x_0}|_I = \varphi$, y por lo tanto

$$\frac{d\varphi_{t_0,x_0}}{dt}(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, \varphi_{t_0,x_0}(t))$$

lo que demuestra que φ_{t_0,x_0} es una solución. ♦

Definición 7 (Solución general). Si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verifica las hipótesis del teorema de Picard, llamamos *solución general* de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ a la función $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ cuyo dominio es el conjunto

$$\Delta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid (t_0, x_0) \in \Omega\,,\ t \in I(t_0, x_0)\ \}$$

y que en $(t, t_0, x_0) \in \Delta$ toma el valor $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi_{t_0,x_0}(t)$.

Ejemplo. Determinaremos la solución general para la ecuación $\dot{x} = x^2$. Tenemos que $f(t, x) = x^2$ es de clase C^∞ en $\Omega = \mathbb{R}^2$, y se aplica el teorema de Picard. La única solución constante (punto de equilibrio) es $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; consecuentemente, si $x_0 \neq 0$ entonces $\varphi(t, t_0, x_0) \neq 0$ para todo $t \in I(t_0, x_0)$. Separando variables obtenemos

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$$

$$I(t_0, x_0) = \begin{cases} (-\infty, t_0 + x_0^{-1}) & \text{si} \quad x_0 > 0 \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad x_0 = 0 \\ (t_0 + x_0^{-1}, +\infty) & \text{si} \quad x_0 < 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid 1 - x_0(t - t_0) > 0\}$$

Teorema 8. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ en las hipótesis del teorema de Picard. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Si $(t_0, x_0) \in K$, entonces existe $t_1 > t_0$ tal que $t_1 \in I(t_0, x_0)$ y $(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) \notin K$. Análogamente, existe $t_2 < t_0$ tal que $t_2 \in I(t_0, x_0)$ y $(t_2, \varphi(t_2, t_0, x_0)) \notin K$*

En otras palabras, el teorema asegura que la gráficas de las soluciones maximales escapan, en el futuro y en el pasado, de cualquier subconjunto compacto contenido en la región Ω, siempre y cuando se aplique el teorema de Picard en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la existencia de t_1 (la existencia de t_2 se obtiene del mismo modo). Llamemos (a, b) al intervalo $I(t_0, x_0)$. Si $b = +\infty$, el resultado es inmediato: la sucesión $\{(t_0 + n, \varphi(t_0 + n, t_0, x_0)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ no está acotada en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y por lo tanto no puede estar contenida en K que es cerrado y acotado. Supongamos entonces que $b < +\infty$. Si consideramos ahora la sucesión

$$\left\{(b - \frac{1}{n}, \varphi(b - \frac{1}{n}, t_0, x_0)) \mid n > 0\right\}$$

y supongamos por el absurdo que está contenida en K. Bajo esta suposición, podemos extraer una subsucesión convergente, es decir, elegir naturales $n_k \to \infty$ tales que

$$(b - \frac{1}{n_k}, \varphi(b - \frac{1}{n_k}, t_0, x_0)) \longrightarrow (b, y) \in K\ .$$

Si aplicamos el teorema de Picard en el punto (b, y), obtenemos que existe $\epsilon > 0$ y un entorno $U \subset \Omega$ de (b, y) tal que para toda condición inicial $(t, x) \in U$ el intervalo maximal $I(t, x)$ contiene al intervalo $(t - \epsilon, t + \epsilon)$. Si llamamos t_k al instante $b - \frac{1}{n_k}$, y $x_k = \varphi(t_k, t_0, x_0)$, tendremos que para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $t_k > b - \epsilon$ y que $(t_k, x_k) \in U$. Pero entonces $I(t_k, x_k)$, que coincide con $I(t_0, x_0) = (a, b)$ puesto que (t_k, x_k) está en la gráfica de la solución maximal por (t_0, x_0), contiene al intervalo $(t_k - \epsilon, t_k + \epsilon)$. Esto es absurdo, porque $t_k + \epsilon > b$. ♦

3 Dependencia de las condiciones iniciales

En esta sección, estudiaremos la regularidad de la solución general. Más precisamente, probaremos que su dominio Δ es un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, que $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ es continua, y que es de clase C^1 cuando la función f que define la ecuación diferencial es de clase C^1.

Nos interesaremos también en familias de ecuaciones diferenciales que dependen continuamente de ciertos parámetros; en este caso, obtendremos que las soluciones *también dependen continuamente de los parámetros*. Veamos un ejemplo sencillo para fijar ideas.

Ejemplo. Consideremos la familia de ecuaciones lineales $\dot{x} = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ parametrizada por los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. El método de variación de constantes permite obtener la solución general (que ahora también depende de los parámetros):

$$\varphi(t, t_0, x_0, a, b) = e^{a(t-t_0)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b e^{-a(s-t_0)} ds \right)$$

Teorema 9 (Continuidad de la solución general). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, localmente Lipschitz respecto de la segunda variable. Entonces el dominio Δ de la solución general φ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ es un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ es continua.*

Veamos como interpretaremos la continuidad de la solución general en un punto $(t_1, t_0, x_0) \in \Delta$ en términos de distancias. Supongamos que en el instante $t_0 \in \mathbb{R}$ iniciamos la evolución regida por la ecuación diferencial en un punto $x_0 \in \Omega$. El estado en un instante $t_1 \in I(t_0, x_0)$ vale digamos $x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0)$. Si el teorema anterior se aplica, entonces dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existirá cierto $\delta > 0$ tal que, toda evolución que se inicia en un instante t_0' con $|t_0' - t_0| < \delta$, desde un punto x_0' con $\|x_0' - x_0\| < \delta$, *estará definida hasta el instante* t_1 (o sea, $t_1 \in I(t_0', x_0')$), y se hallará en dicho instante en un punto $x_1' = \varphi(t_1, t_0', x_0')$ a distancia menor que ϵ de x_1 (es decir, tal que $\|x_1' - x_1\| < \epsilon$).

4 Ecuaciones diferenciales autónomas

Una ecuación diferencial autónoma es una ecuación de la forma

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua definida en un abierto U. Supondremos de ahora en más que la función f es localmente Lipschitz (o de clase C^1 si se quiere), de modo que se aplique el teorema de Picard.

Podemos pensar que se trata de una ecuación como las que vimos antes, pero con la particularidad que el segundo miembro no depende de la variable temporal. Esta particularidad se refleja en las soluciones: Si $\varphi : (a, b) \to U$ es una solución, entonces para todo valor de $a \in \mathbb{R}$, la función $\psi(t) = \varphi(t+a)$ es otra solución. En particular, la solución general verifica

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$$

o dicho de otro modo, el instante inicial t_0 es irrelevante, y el resultado de la evolución sólo depende de la posición inicial $x_0 \in U$ y del tiempo transcurrido $t - t_0$. Por esta razón, para una ecuación diferencial autónoma llamaremos **solución general** a la función continua

$$\phi(t, x_0) = \varphi(t, 0, x_0)$$

definida para $x_0 \in U$ y $t \in I(0, x_0)$. Tienen particular interés las ecuaciones diferenciales autónomas cuyas soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$, es decir $I(0, x_0) = \mathbb{R}$ para todo $x_0 \in U$. Bajo estas hipótesis, la solución general es la única función

$$\phi : \mathbb{R} \times U \to U$$

que verifica las condiciones

$$\frac{d\phi}{dt}(t, x) = f(\phi(t, x)) \qquad\qquad \phi(0, x) = x$$

para todo $x \in U$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Decimos también que ϕ es el **flujo** o **sistema dinámico** generado por la ecuación diferencial en el abierto U. La propiedad fundamental que verifica el flujo de una ecuación autónoma es la siguiente:

Proposición 10 (Propiedad de grupo). *El flujo ϕ definido por la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ verifica*

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s + t, x)$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in U$.

DEMOSTRACIÓN. Fijados $s \in \mathbb{R}$ y $x \in U$, resulta claro que la igualdad vale para $t = 0$. Si definimos las funciones $\varphi_1(t) = \phi(t, \phi(s, x))$ y $\varphi_2(t) = \phi(s + t, x)$, entonces φ_1 y φ_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ que para $t = 0$ toman el valor $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \phi(s, x)$. El teorema de Picard implica entonces que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ♦

Definición 11 (Orbita o trayectoria). La *órbita* de un punto $x \in U$ es la curva que describe en U el punto $x(t) = \phi(t, x)$ cuando t varía en $\mathbb{R}$. Si la órbita de $x \in U$ consta de sólo el punto x entonces es porque $f(x) = 0$ y decimos que x es un **punto de equilibrio** del sistema. Si $f(x) \neq 0$, entonces la unicidad de las soluciones implica que $\dot{x}(t) = f(\phi(t, x)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; en este caso decimos que x (y por lo tanto cualquier otro punto de su órbita) es un **punto regular** del sistema.

4.1 Orbitas periódicas

Las órbitas más simples de detectar en un sistema autónomo son las que constan de un solo punto, es decir los puntos de equilibrio. Todas las demás órbitas son entonces curvas regulares en U, de las cuales nos interesa estudiar su comportamiento asintótico, es decir, las propiedades que permiten predecir sobre la evolución futura del punto $x(t)$. En este sentido, las órbitas regulares más simples son las corresponden a una evolución periódica.

Definición 12 (Punto periódico). Decimos que un punto regular $x \in U$ es *periódico*, si existe $T > 0$ tal que

$$\phi(T, x) = x\,.$$

Si x es un punto periódico, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ vale que

$$\phi(T, \phi(t, x)) = \phi(t + T, x) = \phi(t, \phi(T, x)) = \phi(t, x)\,,$$

lo que demuestra que los puntos de la órbita de x son también periódicos. Por esta razón, decimos que la órbita de x es periódica. Veremos ahora que a toda órbita periódica, le podemos asociar un número real positivo, su *período*. Dado un punto $x \in U$, consideremos el conjunto

$$P_x = \{T \in \mathbb{R} \mid \phi(T, x) = x\}$$

Es claro que este conjunto es vacío si y sólo si x no es ni periódico ni de equilibrio (Si x es punto de equilibrio entonces $P_x = \mathbb{R}$).

Proposición 13 (Período). *Si la órbita de $x \in U$ es periódica, entonces existe un único número real $\tau > 0$ tal que $P_x = \{ n\tau \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

Demostración. Observemos primero que el conjunto P_x es cerrado en $\mathbb{R}$: si $\{t_n\}$ es una sucesión contenida en P_x que converge a cierto número real $t \in \mathbb{R}$ tenemos, debido a la continuidad de ϕ, que

$$\phi(t, x) = \phi(\lim_{n\to\infty} t_n, x) = \lim_{n\to\infty} (\phi(t_n, x)) = x\,.$$

Esto prueba que P_x contiene los límites de sucesiones contenidas en él, lo que equivale a que el conjunto sea cerrado. En segundo lugar, tenemos que el conjunto $P_x \subset \mathbb{R}$ es un *subgrupo* del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$. Esto significa que sumas y opuestos de elementos en P_x también pertenecen a P_x: si t y s están en P_x entonces

$$\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t, x) = x$$

lo cual prueba que $t + s \in P_x$; para ver que $-t \in P_x$, observemos que

$$\phi(-t, x) = \phi(-t, \phi(t, x)) = \phi(0, x) = x\,.$$

Dejamos como ejercicio, verificar que los subgrupos cerrados de $(\mathbb{R}, +)$ son, o bien todo $\mathbb{R}$, o bien de la forma $G_\alpha = \{ n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ para algún número real $\alpha > 0$. Se deduce además de la proposición, que el período τ de la órbita puede definirse como $\tau = \min\{T > 0 \mid \phi(T, x) = x\}$. ♦

Ejemplo. Consideremos la función de clase C^∞ definida en $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-y, x)$. El flujo generado en $\mathbb{R}^2$ por el sistema autónomo $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ es $\phi(t, (x, y)) = (x(t), y(t))$ donde

$$x(t) = x\,\cos(t) - y\,\mathrm{sen}\,(t)$$

$$y(t) = x\,\mathrm{sen}\,(t) + y\,\cos(t)$$

y concluimos entonces, que exceptuando el punto de equilibrio $(0, 0)$, la órbita de todo punto (x, y) es periódica y de período 2π.

5 Ecuaciones diferenciales lineales

Decimos que la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$, con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *ecuación lineal* cuando la función f es afín en la variable x. Esto significa que para cada $t \in \mathbb{R}$, existe un vector $b(t) \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $A(t) \in \mathcal{M}_n$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$f(t,x) = A(t)x + b(t) \ .$$

La continuidad de f implica que tanto los coeficientes $a_{ij}(t)$ de la matriz $A(t)$, como las coordenadas del vector $b(t)$ son funciones continuas.

Recordemos que $\mathcal{M}_n$, el espacio de las matrices $n \times n$ a coeficientes reales, es un espacio vectorial de dimensión n^2 (isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$). Este espacio de matrices también conforma un *álgebra no conmutativa*, con la operación de multiplicación de matrices. Pensaremos también el espacio $\mathcal{M}_n$ como un espacio vectorial normado, con la norma definida por

$$\| \ \| : \mathcal{M}_n \to [0, +\infty)$$

$$\| A\| = \sup \{ \| Ax\| \mid \| x\| = 1\} \ .$$

Recordemos además, que esta norma verifica las siguientes propiedades: Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que $\| Ax\| \leq \| x\|$, y para toda otra matriz $B \in \mathcal{M}_n$, se tiene $\| AB\| \leq \| A\| \, \| B\|$. En lo que sigue,

$$A = \lim_{k \to \infty} A_k$$

significará que la sucesión de matrices $A_k \in \mathcal{M}_n$, $k > 0$, *converge a* la matriz $A \in \mathcal{M}_n$, es decir, que

$$\lim_{k \to \infty} \| A - A_k\| = 0 \ .$$

Una función $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n$ es *derivable* si cada coeficiente $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la matriz A es derivable. En este caso, llamamos derivada de la matriz $A(t)$ a la matriz

$$\dot{A}(t) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(A(t+s) - A(t) \right) = \left(\dot{a}_{ij}(t) \right) .$$

Veremos que el conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal tiene una estructura muy particular.

5.1 Soluciones maximales, lema de Gronwall

Demostraremos que las soluciones maximales de una ecuación lineal están definidas en $\mathbb{R}$. En la demostración, utilizamos el siguiente lema:

Lema 14 (Gronwall). *Si* $u, v : [a, b] \to [0, +\infty)$ *son dos funciones continuas, y existe una constante* $\alpha > 0$ *para la cual se verifica*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\, ds$$

para todo $t \in [a, b]$*, entonces vale también para todo* $t \in [a, b]$ *que*

$$u(t) \leq \alpha\, e^{\int_a^t v(s)\, ds}\ .$$

Demostración. Definimos en $[a, b]$ la función $w(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\, ds$. Es claro que w es de clase C^1, su derivada vale $w'(t) = u(t)v(t) \geq 0$, que $w(a) = \alpha > 0$, y por hipótesis sabemos que $u(t) \leq w(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Pero entonces

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq w(t)v(t)$$

y por lo tanto, dividiendo por $w(t) > \alpha > 0$ e integrando entre a y t resulta

$$\log w(t) - \log \alpha = \int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}\, ds \leq \int_a^t v(s)\, ds\,.$$

Finalmente, resulta que $u(t) \leq w(t) \leq \alpha\, e^{\int_a^t v(s)\, ds}$. ♦

Teorema 15. *Sean* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n$ *y* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *funciones continuas. Las soluciones maximales de una ecuación lineal*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea (I, φ) una solución maximal, un instante $t_0 \in I$, y un intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que contenga a t_0. Probaremos que necesariamente tendremos $[a, b] \subset I$, y que por lo tanto, tiene que ser $I = \mathbb{R}$, puesto que el intervalo $[a, b]$ es arbitrario.

Dado que φ es solución de la ecuación, tenemos que para todo $t \in I$ se cumple

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\varphi(s) + b(s)\, ds$$

donde $x_0 = \varphi(t_0)$. Se deduce entonces que

$$\| \varphi(t)\| \leq \| x_0\| + \int_{t_0}^{t} \| b(s)\| \; ds + \int_{t_0}^{t} \| A(s)\| \, \| \varphi(s)\| \; ds \, .$$

Observemos ahora que las funciones $s \mapsto \| b(s)\|$ y $s \mapsto \| A(s)\|$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto son acotadas en el intervalo $[a, b]$. Esto implica que si definimos

$$B = \max \{\| b(s)\| \; \mid s \in [a, b]\,\}$$

$$M = \max \{\| A(s)\| \; \mid s \in [a, b]\,\}$$

entonces para todo $t \in [a, b] \cap I$ se verifica

$$\| \varphi(t)\| \leq \| x_0\| + B(b - a) + \int_{t_0}^{t} M \, \| \varphi(s)\| \; ds \, .$$

Si aplicamos el lema de Gronwall a la función $u(t) = \| \varphi(t)\|$, llamando α a la constante $\| x_0\| + B(b - a)$, resulta que

$$\| \varphi(t)\| \leq \alpha \, e^{M|\, t - t_0|} \leq \alpha \, e^{M(b-a)} \, .$$

Si definimos ahora el conjunto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$K = \left\{(t, x) \mid t \in [a, b]\,,\ \| x\| \leq \alpha \, e^{M(b-a)}\right\} \,,$$

entonces es evidente que K es compacto y que $(t_0, x_0) \in K$. Si aplicamos el teorema 8, que asegura que las gráficas de las soluciones maximales no pueden estar contenidas en subconjuntos compactos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, obtenemos que existe $t_1 \in I$, con $t_0 < t_1$, tal que $(t_1, \varphi(t_1)) \notin K$. Pero entonces $t_1 \notin [a, b]$ lo que implica que $b < t_1$. Análogamente, obtenemos que existe $t_2 \in I$ con $t_2 < t_0$ y tal que $t_2 < a$. Por lo tanto, vale que $[a, b] \subset [t_2, t_1] \subset I$ como queríamos demostrar. ♦

5.2 Principio de superposición, matriz fundamental

El conjunto de las soluciones de una ecuación lineal tiene una estructura lineal. Para formalizar esta afirmación, introducimos la noción de ecuación lineal homogénea:

Definición 16 (Ecuación homogénea). Una ecuación diferencial lineal es *homogénea* cuando es de la forma $\dot{x} = A(t)x$. Llamamos *ecuación homogénea asociada* a una ecuación lineal $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ a la ecuación $\dot{x} = A(t)x$, es decir, a la que se obtiene eliminando el término independiente $b(t)$.

Proposición 17. *Si denotamos $\mathcal{S}$ el conjunto de las soluciones de una ecuación lineal en $\mathbb{R}^n$, es decir*

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) + b(t)\} \ ,$$

y denotamos $\mathcal{S}_H$ el de las soluciones de su ecuación homogénea asociada, o sea

$$\mathcal{S}_H = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)\} \ ,$$

entonces

1. *El conjunto $\mathcal{S}_H$ es un espacio vectorial de dimensión n.*

2. *Para toda solución particular $\varphi_p \in \mathcal{S}$ se tiene que*

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_H = \{\varphi_p + \varphi \mid \varphi \in \mathcal{S}_H\} \ .$$

Demostración. Si tomamos $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_H$ entonces toda combinación lineal $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{S}_H$. Esto prueba que el conjunto de las soluciones de una ecuación homogénea es un subespacio del espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ (que es de dimensión infinita). Para probar que $\dim(\mathcal{S}_H) = n$, elegimos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ llamamos φ_i a la única solución de la ecuación homogénea que verifica la condición inicial $\varphi_i(0) = v_i$. Probaremos que el conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es una base de $\mathcal{S}_H$. Si $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0 \in \mathcal{S}_H$, entonces evaluando en $t = 0$ obtenemos que

$$a_1\varphi_1(0) + \cdots + a_n\varphi_n(0) = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \in \mathbb{R}^n$$

y por lo tanto $a_1 = \cdots = a_n = 0$, lo que prueba que el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Para ver que $\mathcal{B}$ genera $\mathcal{S}_H$, consideramos una solución arbitraria $\varphi \in \mathcal{S}_H$ y definimos $v = \varphi(0)$. Existen entonces

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Pero entonces las funciones φ y $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ son dos soluciones que toman el valor v en $t = 0$, y por lo tanto $\varphi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$.

Para demostrar la segunda afirmación, basta con verificar que si $\varphi_p \in \mathcal{S}$, entonces $\varphi \in \mathcal{S}_H$ si y sólo si $\varphi_p + \varphi \in \mathcal{S}$. ♦

Para lo que sigue, conviene recordar lo siguiente: si A y B son matrices, entonces cada columna de la matriz producto AB es el producto de la matriz A por la columna correspondiente de la matriz B. Si $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n$ es una matriz diferenciable (es decir, cada coeficiente $m_{ij}(t)$ de la matriz $M(t)$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), entonces resulta que M verifica la ecuación matricial $\dot{X} = A(t)X$, si y sólo si cada columna de M, pensada como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = A(t)x$. Esto nos permite afirmar, que dada una matriz $M_0 \in \mathcal{M}_n$, existe una única matriz $M(t)$ diferenciable, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, y tal que $M(0) = M_0$.

Definición 18 (Matriz fundamental). La *matriz fundamental* de una ecuación lineal homogénea $\dot{x} = A(t)x$ es la única matriz $\phi(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= I \qquad \text{(matriz identidad), y} \\ \dot{\phi}(t) &= A(t)\phi(t) \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

De acuerdo a lo que dijimos antes, y dado que las columnas de la matriz identidad conforman la base canónica de $\mathbb{R}^n$, resulta claro que la matriz fundamental se obtiene como la matriz cuyas columnas son las soluciones de la ecuación homogénea que en $t = 0$ pasan por la base canónica de $\mathbb{R}^n$. El interés de considerar la matriz fundamental resulta evidente en la siguiente afirmación (cuya verificación es inmediata):

Si $\phi(t)$ es la matriz fundamental de la ecuación homogénea $\dot{x} = A(t)x$, entonces la solución que en $t = 0$ vale x_0 está dada por $x(t) = \phi(t)x_0$.

Ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& 2tx \\ \dot{y} &=& x + 2ty \end{array} \right.$$

Si llamamos u al vector (x, y), entonces el sistema es equivalente a la ecuación lineal homogénea $\dot{u} = A(t)u$, donde $A(t)$ es la matriz $\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$. Como la primer ecuación del sistema no depende de la segunda variable, podemos resolverla, y resulta que

$$x(t) = x_0 e^{t^2} .$$

Reemplazando x en la segunda ecuación obtenemos una ecuación lineal no homogénea en y, a saber

$$\dot{y} = 2ty + x_0 e^{t^2}$$

que también podemos resolver (usando el método de variación de constantes). Resulta entonces que

$$y(t) = y_0 e^{t^2} + x_0 t e^{t^2} .$$

Por último, si escribimos la solución en forma vectorial el resultado es

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ te^{t^2} & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \phi(t) u_0 ,$$

es decir, la matriz fundamental es $\phi(t) = e^{t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

Método de variación de constantes. Supongamos que conocemos la matriz fundamental $\phi(t)$ de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Tenemos entonces que $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$ y que $\phi(0) = I$. El método de variación de constantes nos permite hallar la solución general de la ecuación no homogénea. Consiste en buscar soluciones de la forma

$$x(t) = \phi(t) y(t)$$

es decir, en reemplazar la constante $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en la expresión de la solución de la ecuación homogénea por una función $y(t)$ que debemos determinar. Derivando x obtenemos que

$$\dot{x}(t) = \dot{\phi}(t) y(t) + \phi(t) \dot{y}(t) = A(t) x(t) + \phi(t) \dot{y}(t)$$

y deducimos que x verifica la ecuación no homogénea si y sólo si

$$\dot{y}(t) = \phi^{-1}(t) b(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Si le imponemos ahora a x la condición inicial $x(0) = x_0$, obtenemos integrando $\dot{y}$ que

$$x(t) = \phi(t) \left(x_0 + \int_0^t \phi^{-1}(s) b(s) \, ds \right) .$$

5.3 Ecuaciones lineales autónomas

Para que una ecuación lineal sea autónoma, tanto la matriz $A(t)$ como el término independiente $b(t)$ deben ser constantes. Consideramos entonces ecuaciones del tipo

$$\dot{x} = Ax + b$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz a coeficientes reales y b es un vector de $\mathbb{R}^n$. Una particularidad muy importante de estas ecuaciones, es que a diferencia de las ecuaciones lineales en general, las de coeficientes constantes pueden resolverse explícitamente.

Estudiamos en primer lugar la matriz fundamental $\phi(t)$ de la ecuación homogénea $\dot{x} = Ax$. Si bien la matriz A es de coeficientes reales, será útil dar la definición que sigue para matrices complejas.

Definición 19 (Exponencial de una matriz). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz $n \times n$ con coeficientes complejos, su *exponencial* es la matriz

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{m\to\infty} \left(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{m!}A^m \right)$$

En lo que sigue asumiremos que la matriz exponencial está bien definida, es decir, que la serie que la define siempre es convergente.

Teorema 20. *La matriz fundamental de la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes $\dot{x} = Ax$ es $\phi(t) = e^{At}$.*

Demostración. Es claro que $\phi(0) = e^0 = I$. Para ver que es derivable, observemos que la serie de las derivadas converge a $A\,e^{At}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

La convergencia es uniforme en compactos, lo que implica que $\phi(t) = e^{At}$ es derivable, y que su derivada vale $\dot{\phi}(t) = A\phi(t)$. ♦

Ejemplo. Se verifica fácilmente que si

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \; :$$

Por un lado, evaluando en $t = 0$ la matriz de senos y cosenos obtenemos la matriz identidad; por otro, si la derivamos, obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t & -\cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} .$$

Proposición 21. *De la definición de la matriz exponencial se deducen las siguientes propiedades:*

1. $D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad e^D = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & \\ & e^{a_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ & & & e^{a_n} \end{pmatrix}.$

2. *Si* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+s}$ *donde* $A_1 \in \mathcal{M}_r$ *y* $A_2 \in \mathcal{M}_s$ *entonces*

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix} .$$

3. *Si* $A = PBP^{-1}$ *entonces* $e^A = P\, e^B\, P^{-1}$.

Demostración. La primera afirmación se deduce de la segunda; la segunda se debe al hecho que la multiplicación de matrices preserva la estructura de bloques de los factores. Para demostrar la tercera afirmación, observemos que $A^k = PB^kP^{-1}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} e^A &= \lim_{m\to\infty} \left(I + PBP^{-1} + \cdots + \frac{1}{m!} PB^mP^{-1} \right) \\ &= P \lim_{m\to\infty} \left(I + B + \cdots + \frac{1}{m!} B^m \right) P^{-1} = P\, e^B\, P^{-1} . \end{aligned}$$

♦

Ejemplo. Supongamos que queremos resolver el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3x - 2y \\ \dot{y} & = & 2x + 3y \end{array} \right.$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ya que las raíces de su polinomio característico son $\lambda = 3 \pm 2i$. Sin embargo, la matriz es diagonalizable en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} .$$

Deducimos entonces que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(3+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(3-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & e^{3t}(x_0 \cos 2t - y_0 \operatorname{sen} 2t\,) \\ \\ y(t) & = & e^{3t}(x_0 \operatorname{sen} 2t + y_0 \cos 2t\,) \end{array} \right.$$

6 Estabilidad de las trayectorias

En general, en las aplicaciones, las condiciones iniciales de la evolución de un sistema se miden con cierta imprecisión (error de medida) que dificulta en ciertos casos la predicción. Por ejemplo, si la ecuación diferencial que rige esta evolución fuese $\dot{x} = -x$, entonces el error en la condición inicial tiene poca trascendencia, puesto que todas las soluciones tienen el mismo comportamiento asintótico en el futuro , i.e. tienden a 0 cuando $t \to +\infty$. En cambio, si la ecuación fuese $\dot{x} = x$, cuya solución general es $x(t) = x_0\, e^t$, se plantea el siguiente problema: si el error en la medida de x_0 es mayor que $|\, x_0|$, entonces el signo de x_0 queda indeterminado, al igual que el comportamiento asintótico en el futuro de la solución por x_0. Nos interesa entonces distinguir las soluciones cuyo comportamiento asintótico es el mismo que el de las soluciones por condiciones iniciales suficientemente próximas.

Definición 22 (Trayectoria estable). Supongamos que $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un flujo generado por una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ tiene una trayectoria *estable en el futuro*, cuando para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que: si $\|\, y - x\| < \delta$, entonces $\|\, \phi(t, y) - \phi(t, x)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Definición 23 (Trayectoria asintóticamente estable). Decimos que el punto $x \in \mathbb{R}^n$ tiene una trayectoria *asintóticamente estable en el futuro*, si es estable en el futuro, *y además*, existe $\rho > 0$ tal que, si $\|\, y - x\| < \rho$ entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \|\, \phi(t, y) - \phi(t, x)\| = 0\ .$$

Observaciones.

1. Es posible definir de manera análoga, las nociones de estabilidad y estabilidad asintótica en el pasado, observando el comportamiento de las soluciones cuando $t < 0$ y cuando $t \to -\infty$.

2. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tiene una trayectoria *inestable* (es decir, no estable) si y sólo si, existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $x_n \to x$ tal que, para cada $n > 0$ existe $t_n > 0$ que verifica

$$\|\, \phi(t_n, x_n) - \phi(t_n, x)\| \geq \epsilon\ .$$

3. **(Punto de equilibrio estable.)** Si x_0 es un punto de equilibrio, entonces la condición de tener una trayectoria estable en el futuro (o en el pasado) se expresa más simplemente: x_0 es un *punto de equilibrio estable* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, las trayectorias que en $t = 0$ se encuentran a distancia menor que δ de x_0 se mantienen a distancia menor que ϵ de x_0 para todo $t \geq 0$. Si además de ser estable, existe $\rho > 0$ tal que, si $\| y - x_0 \| < \rho$ entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t, y) = x_0 \ ,$$

decimos que x_0 es *asintóticamente estable*. Es importante resaltar que esta última condición por sí sola no garantiza la estabilidad: el estudio cualitativo del siguiente sistema en $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & x(1-(x^2+y^2))^2 - y(\sqrt{x^2+y^2} - y) \\ \\ \dot{y} & = & y(1-(x^2+y^2))^2 + x(\sqrt{x^2+y^2} - y) \end{array} \right.$$

revela que el punto de equilibrio $(0,1)$ es inestable, a pesar de que

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t, (x, y)) = (0, 1)$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

6.1 El péndulo simple

El péndulo consiste en una masa puntual m obligada a desplazarse sobre una guía circular lisa (sin rozamiento) y contenida en un plano vertical. Si parametrizamos la guía con el ángulo x, medido desde el punto más bajo de la misma, entonces la posición $x(t)$ de la masa m en el instante t verifica la ecuación de Newton

$$r\,\ddot{x} = -g\,\mathrm{sen}\ x$$

donde $r > 0$ es el radio de la guía y g es la aceleración de la gravedad. Si definimos la constante

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}\ ,$$

la ecuación es equivalente al sistema de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dot{x} & = & \omega\, y \\ \dot{y} & = & -\omega\,\mathrm{sen}\, x \end{array} \right.$$

Este sistema es no lineal, satisface las hipótesis del teorema de Picard (de existencia y unicidad de las soluciones), y además define un flujo en $\mathbb{R}^2$, es decir, las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$. Demostraremos esta última afirmación haciendo uso de la conservación de la energía mecánica del sistema.

Proposición 24. *Las soluciones maximales de la ecuación del péndulo están definidas en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Observemos en primer lugar, como decíamos antes, que la energía mecánica del sistema se conserva, es decir, la energía cinética más un potencial

$$\frac{1}{2}\,m(r\dot{x})^2 - mg(r\cos x) = mgr(\ \frac{1}{2}\,y^2 - \cos x\ )$$

es constante a lo largo de las trayectorias. En particular, se conserva la función

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad E(x, y) = \frac{1}{2}\,y^2 - \cos x\ .$$

Esto quiere decir, que si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema, entonces

$$E(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}\,y(t)^2 - \cos x(t) = c$$

para todo t en el dominio de la solución. Esto se verifica inmediatamente calculando la derivada de la composición de la energía con la solución:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,y^2 - \cos x\right) &= \dot{y}\,y + \dot{x}\,\mathrm{sen}\,x \\ &= (-\omega\,\mathrm{sen}\,x)\,y + (\omega\,y)\,\mathrm{sen}\,x = 0\;. \end{aligned}$$

Deducimos que

$$|\,y(t)| = \sqrt{2(c + \cos\,x(t))} \leq C_1 = \sqrt{2c+2}\;.$$

Supongamos ahora por el absurdo, que la solución $(x(t), y(t))$ es maximal y está definida sobre el intervalo (a, b) con $b < +\infty$. Fijando algún instante inicial $t_0 \in (a, b)$, y llamando x_0 a $x(t_0)$, podemos escribir

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \omega\,y(s)\,ds$$

y deducir, utilizando que $|\,y(t)| \leq C_1$, que $|\,x(t) - x_0| \leq C_2 = (b - t_0)\omega\,C_1$. Pero esto contradice el teorema 8, aplicado al compacto

$$K = \Big\{(t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \,|\quad t_0 \leq t \leq b\,, \quad |\,y| \leq C_1\,, \quad |\,x - x_0| \leq C_2\Big\}\;.$$

La suposición que $b < +\infty$ es entonces absurda, y por lo tanto $b = +\infty$. Análogamente se prueba que $a = -\infty$. ⧫

Estudiaremos ahora en forma cualitativa las trayectorias del sistema. Los puntos de equilibrio de este sistema son los puntos de la forma $(n\pi, 0)$, con n un número entero. En realidad, el péndulo tiene sólo dos puntos de equilibrio, a saber, los puntos de la guía de altura máxima y mínima. La diferencia se debe a que la parametrización que utilizamos para la guía no es inyectiva: x y $x+2k\pi$ se corresponden, para todo k entero, con el mismo punto de la guía. Por lo tanto, las traslaciones del plano $(x, y) \mapsto (x+2k\pi, y)$ son simetrías del sistema, y en particular, si trasladamos una solución obtenemos otra solución.

Los conjuntos de nivel de la función energía son invariantes por el flujo engendrado por el sistema. Esto nos permite discutir el comportamiento de las trayectorias en función del nivel en el que se encuentran (observar que $E(x, y) \geq -1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

- Si $E(x, y) = -1$, entonces $y = 0$, y $\cos x = 1$, es decir, $x = 2k\pi$ con k entero. Las trayectorias en este nivel de energía son puntos de equilibrio (sobre la guía se corresponden con el punto más bajo).

- Si $E(x, y) = c$ con $-1 < c < 1$, entonces las trayectoria de (x, y) nunca pasa por el punto más alto de la guía, puesto que allí $E \geq 1$. La altura máxima de la trayectoria en la guía es alcanzada con energía cinética nula, es decir $y(t) = 0$, y por lo tanto en ese instante $\cos x(t) = -c$. A partir de entonces, la masa cae, y alcanza otra vez la altura máxima en el punto simétrico respecto al diámetro vertical de la guía. El resultado es una órbita periódica: está contenida en las gráficas de

$$y = \pm\sqrt{2(c + \cos x)}\ ,$$

y en particular se deduce la acotación (a menos de una traslación)

$$-\arccos(-c)+ \leq x(t) \leq \arccos(-c)\ .$$

- Si $E(x, y) = 1$, entonces hay varias posibilidades para la trayectoria de (x, y). En primer lugar tenemos los puntos de equilibrio $y = 0$, $\cos x = -1$, que se corresponden con el punto más alto de la guía. La unicidad de las soluciones nos permite deducir que las demás trayectorias en este nivel de energía verifican $\cos x(t) > -1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y que por lo tanto, a menos de una traslación se verifica

$$-\pi < x(t) < \pi\ .$$

De la conservación de la energía obtenemos que

$$y(t) = \pm\sqrt{2(1 + \cos x(t))}$$

donde el signo está determinado por el valor de $y = y(0)$. Si $y > 0$, entonces $\dot{x}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y la trayectoria verifica

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (\pi, 0) \qquad \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (-\pi, 0)\ .$$

En cambio, si $y < 0$ se cumple

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (-\pi, 0) \qquad \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (\pi, 0)\ .$$

En síntesis, el nivel de energía $E = 1$ contiene tres trayectorias módulo traslaciones: el punto de equilibrio correspondiente al punto más alto de la guía, y dos trayectorias que sobre la guía tienden al punto más alto cuando $t \to \pm\infty$, una con $\dot{x} > 0$ y otra con $\dot{x} < 0$.

- Por último, si $E(x,y) = c > 1$ obtenemos dos trayectorias para las cuales el signo de $\dot{x} = \omega y$ es constante, una que verifica

$$y(t) = \sqrt{2(c + \cos x(t))} > 0 \ ,$$

y la otra

$$y(t) = -\sqrt{2(c + \cos x(t))} < 0 \ .$$

En particular vale

$$0 < \sqrt{2(c-1)} \leq |\, y(t)| \leq \sqrt{2(c+1)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, lo que significa que la masa m da infinitas vueltas alrededor de la guía, tanto en el futuro como en el pasado (la velocidad mínima se alcanza en el punto más alto, y la máxima en el más bajo). Estas trayectorias no son periódicas en el plano, pero debemos considerarlas periódicas cuando las pensamos sobre la guía circular.

Estabilidad de los puntos de equilibrio. Vamos a demostrar que los puntos de equilibrio $P_{2k} = (2k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir los de energía potencial mínima, son estables, y que los puntos de equilibrio $P_{2k+1} = ((2k+1)\pi, 0)$ son inestables. Dado que las transformaciones $(x,y) \mapsto (x+2k\pi, y)$ son simetrías de la ecuación, basta probar que $(0,0)$ es estable (pero no asintóticamente), y que $(\pi, 0)$ es inestable.

Veamos primero la estabilidad de $(0,0)$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio ϵ. Sobre esa circunferencia la función E tiene un mínimo $m(\epsilon) > -1$. Supongamos que (x,y) es una solución inicialmente cercana a $(0,0)$; digamos por ejemplo que $|\, x(0)|\,, |\, y(0)| < \delta$. Pero entonces de la conservación de la energía resulta

$$c = \frac{1}{2}\, y(t)^2 - \cos x(t) = \frac{1}{2}\, y(0)^2 - \cos x(0) < \frac{1}{2}\delta^2 - \cos\delta$$

y por lo tanto se cumple que $c \in (-1, m(\epsilon))$ si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño. Esto implica que ningún punto $(x(t), y(t))$ de la trayectoria puede encontrarse a distancia ϵ del origen, porque sobre estos puntos dijimos que la función E toma valores mayores o iguales que $m(\epsilon)$. Consecuentemente, la trayectoria debe estar contenida en el conjunto de puntos que distan menos que ϵ del origen lo que asegura la estabilidad de dicho punto (en el futuro y en el pasado). La estabilidad no puede ser asintótica, puesto que vimos que todas las trayectorias cercanas a $(0, 0)$ son periódicas, y por lo tanto no convergen cuando $t \to +\infty$.

Para terminar, veamos que el punto de equilibrio $(\pi, 0)$ es inestable. Consideremos las condiciones iniciales cercanas $(\pi - 1/n, 0)$, $n \geq 0$, y observemos que las trayectorias que generan son periódicas, y pasan por los puntos $(-\pi + 1/n)$. Esto implica la inestabilidad del punto $(\pi, 0)$.

Observación. Como vimos el punto de equilibrio correspondiente a la mínima energía es estable pero no asintóticamente estable. En realidad esto ocurre siempre en los sistemas mecánicos (y conservativos en general):

Definición 25. Dada una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ en una región Ω de R^n, decimos que una función continua $E : U \to \mathbb{R}$, definida en un subconjunto abierto U de Ω, es una **preintegral** de la ecuación si es constante sobre las trayectorias de la ecuación; es decir, tal que si $x \in U$ entonces

$$E(\varphi(t, x)) = E(x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, x) \in U$. Las preintegrales *triviales* son las funciones constantes en Ω, y no presentan ningún interés para el estudio de la ecuación diferencial.

Observemos entonces que si la ecuación tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable $x_0 \in \Omega$, entonces toda preintegral de la ecuación es trivial en un entorno de x_0.

Volviendo al ejemplo del péndulo, deducimos que $(0, 0)$ no puede ser asintóticamente estable, ya que la energía es una preintegral global (i.e. definida en todo el espacio) que no es trivial (i.e. no es constante) en ningún entorno de $(0, 0)$.

6.2 El método de Liapunov

Como vemos en el ejemplo de la sección anterior, la estabilidad de las trayectorias de una ecuación diferencial puede estudiarse sin la necesidad de resolver explícitamente la ecuación. Veremos ahora un método desarrollado por el matemático ruso Alexandre Liapunov (1857-1918). Consiste en considerar funciones auxiliares para las cuales se verifican hipótesis de crecimiento (o decrecimiento) a lo largo de las trayectorias. Consideremos una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ en una región Ω de R^n, en las hipótesis del teorema de Picard, y sea $\varphi(t, x)$ la trayectoria que en $t = 0$ pasa por x.

Definición 26 (función de Liapunov). Una función continua $V : U \to \mathbb{R}$, definida en un subconjunto abierto U de Ω, es una *función de Liapunov* para la ecuación, si para todo $x \in U$ la composición $V(\varphi(t, x))$, que está definida en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$, es derivable en $t = 0$, y el valor de esta derivada depende continuamente del punto $x \in U$.

Definición 27 (derivada de Liapunov). Si $V : U \to \mathbb{R}$ es una función de Liapunov para cierta ecuación diferencial, su *derivada de Liapunov* es la función continua $\dot{V} : U \to \mathbb{R}$

$$\dot{V}(x) = \frac{dh}{dt}(0) \qquad h(t) = V(\varphi(t, x)) \ .$$

Ser una función de Liapunov no es realmente una propiedad muy restrictiva, ya que toda función de clase C^1 lo es para cualquier ecuación. En este caso, la regla de la cadena nos permite calcular la derivada de Liapunov, y resulta que para todo $x \in U$ vale

$$\dot{V}(x) =< \nabla V(x), f(x) > \ .$$

En lo que sigue utilizaremos la siguiente terminología:

- Una función $V : U \to \mathbb{R}$ es **definida positiva** en el punto $x_0 \in U$ si $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo $x \neq x_0$.
- Una función $V : U \to \mathbb{R}$ es **semidefinida positiva** en el punto $x_0 \in U$ si $V(x_0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ para todo $x \in U$.
- Una función $V : U \to \mathbb{R}$ es **definida negativa** (resp. **semidefinida negativa**) en el punto $x_0 \in U$, si la función $-V$ es definida positiva (resp. semidefinida positiva) en x_0.

Supongamos que x_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial (es decir, $f(x_0) = 0$)), y nos interesamos en su estabilidad. Un problema que se plantea es que la ecuación diferencial no define necesariamente un flujo: pese a que la solución de equilibrio $x(t) = x_0$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, las soluciones maximales para condiciones iniciales próximas, pueden *a priori* estar definidas sobre intervalos acotados superiormente. Si así fuera, no tendría sentido hablar del comportamiento asintótico de las trayectorias o de estabilidad. Podríamos obviar este problema restringiendo nuestro estudio a las ecuaciones diferenciales que definen un flujo. Pero esto no será necesario, porque como veremos, resulta *a fortiori* de los teoremas siguientes, que las trayectorias por condiciones iniciales suficientemente cercanas al punto de equilibrio x_0 están definidas para todo $t \geq 0$.

Teorema 28 (Liapunov 1). *Si $V : U \to \mathbb{R}$ es una función de Liapunov definida en un entorno U de x_0 tal que:*

1. *la función V es definida positiva en x_0, y*

2. *su derivada de Liapunov $\dot{V}$ es semidefinida negativa en x_0,*

entonces x_0 es un punto de equilibrio estable en el futuro.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$. Probaremos que podemos hallar $\delta > 0$ tal que, si $\| y - x_0\| < \delta$, entonces $\varphi(t, y)$ está definido para todo $t \geq 0$, y $\| \varphi(t, y) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Para lograr esto, elegimos primero $\epsilon_1 < \epsilon$ suficientemente pequeño para que la bola cerrada de centro x_0 y radio ϵ_1 esté contenida en U, el dominio de la función de Liapunov. Si llamamos S_{ϵ_1} al borde de esta bola, es decir, a la esfera de dimensión $n - 1$

$$S_{\epsilon_1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x - x_0\| = \epsilon_1\} \ ,$$

es claro que V es estrictamente positiva en S_{ϵ_1}, y como esta esfera es compacta y V es continua, deducimos que V tiene un valor mínimo $m > 0$ sobre S_{ϵ_1}. Por otra parte, la continuidad de V, y el hecho que $V(x_0) = 0$, nos permite afirmar que existe $\delta > 0$ tal que, si $\| y - x_0\| < \delta$, entonces $V(y) < m$. Es claro que $\delta < \epsilon_1$.

Consideremos ahora un punto y cualquiera en la bola abierta de centro x_0 y radio δ, y la solución maximal $\varphi(t, y)$ que en $t = 0$ pasa por el punto y. Esta solución está definida para $t < a$, donde $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Vamos a demostrar que $\| \varphi(t, y) - x_0\| < \epsilon_1$ para todo $t < a$. Supongamos por el absurdo que existe $0 < t < a$ para el cual $\| \varphi(t, y) - x_0\| \geq \epsilon_1$. Si definimos entonces t_1 como el instante en que la trayectoria escapa por primera vez de la bola de centro x_0 y radio ϵ_1, es decir,

$$t_1 = \inf \{t \in (0, a) \mid \| \varphi(t, y) - x_0\| \geq \epsilon_1\} ,$$

resulta claro que $t_1 > 0$, $\varphi(t_1, y) \in S_{\epsilon_1}$. Podemos entonces definir para $t \in [0, t_1]$ la composición de la función de Liapunov con la solución. Más precisamente, definimos $h : [0, t_1] \to \mathbb{R}$, $h(t) = V(\varphi(t, y)$. Esta función es derivable:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(s) &= \lim_{t\to 0} \frac{V(\varphi(s+t, y)) - V(\varphi(s, y))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{V(\varphi(t, \varphi(s, y))) - V(\varphi(s, y))}{t} = \dot{V}(\varphi(s, y)) . \end{aligned}$$

Pero entonces h es decreciente puesto que por hipótesis $\dot{V}$ es semidefinida negativa. Esto es absurdo, ya que $h(0) = V(y) < m$ y $h(t_1) = V(\varphi(t_1, y)) \geq m$. Concluimos que $\| \varphi(t, y) - x_0\| < \epsilon_1$ para todo $t < a$. En particular, esto implica que $a = +\infty$ (si fuera $a < +\infty$ entonces de acuerdo al teorema 8 la solución no sería acotada), y prueba que el punto x_0 es estable.

□

Teorema 29 (Liapunov 2). *Si $V : U \to \mathbb{R}$ es una función de Liapunov definida en un entorno U de x_0 tal que:*

1. *la función V es definida positiva en x_0, y*

2. *su derivada de Liapunov $\dot{V}$ es definida negativa en x_0,*

entonces x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro.

Demostración. En primer lugar, observemos que las hipótesis de este segundo teorema permiten aplicar el primero, ya que una función que es definida negativa es en particular semidefinida negativa. Sabemos por lo tanto que el punto x_0 es estable. Podemos entonces elegir $\epsilon_0 > 0$ y $\delta_0 > 0$ tales que, la bola cerrada de centro x_0 y radio ϵ_0 esté contenida en U y que para todo punto $y \in \mathbb{R}^n$ que verifique $\| y - x_0\| < \delta_0$ se cumpla $\| \varphi(t, y) - x_0\| < \epsilon_0$ para todo $t \geq 0$. Vamos a demostrar que además para estos puntos y se cumple que

$$\lim_{t\to +\infty} \| \varphi(t, y) - x_0\| = 0 .$$

Debemos entonces probar que dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $T > 0$ tal que $\|\varphi(t,y) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t > T$. Una vez elegido ϵ, la estabilidad de x_0 nos permite afirmar que existe $\delta > 0$ con la propiedad siguiente: si $\|\varphi(T,y) - x_0\| < \delta$ entonces para $t > T$ se cumple

$$\|\varphi(t,y) - x_0\| = \|\varphi(t-T, \varphi(T,y)) - x_0\| < \epsilon \ .$$

Es entonces suficiente demostrar que, dado $\delta > 0$ arbitrario, para algún instante $T > 0$, la trayectoria del punto y se encuentra en la bola de centro x_0 y radio δ. Supongamos por el absurdo que la trayectoria está contenida en el anillo

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \delta \leq \|x - x_0\| \leq \epsilon_0\} \ ,$$

es decir, suponemos que se verifica que $\delta \leq \|\varphi(t,y) - x_0\| \leq \epsilon_0$ para todo $t \geq 0$. Si como en la prueba del teorema anterior, definimos la función $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(t) = V(\varphi(t,y))$, resulta que h es derivable y que

$$\frac{dh}{dt}(t) = \dot{V}(\varphi(t,y)) \leq \sup \left\{ \dot{V}(x) \mid x \in A \right\} = \alpha \ .$$

Como el conjunto A es compacto y la función $\dot{V}$ es continua, este supremo es en realidad un máximo, y por lo tanto $\alpha < 0$ ya que $\dot{V}$ es negativa en todo punto de A. Esto implica que

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\infty$$

lo cual es absurdo puesto que $V \geq 0$. □

El recíproco del teorema 1 de Liapunov es falso. Por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{R}$ la ecuación $\dot{x} = f(x)$, donde f es la función definida por $f(0) = 0$, y $f(x) = (1/x^2)sen^2(1/x)$ si $x \neq 0$, podemos ver que 0 es un punto de equilibrio estable, pero que no existe una función de Liapunov en que verifique las hipótesis del teorema. Sin embargo, el recíproco del teorema 2 es verdadero y es debido a José Luis Massera (1915-2002).

Teorema 30 (Massera). *Si x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro, entonces existe una función de Liapunov V definida en un entorno de x_0, tal que, V es definida positiva en x_0, y $\dot{V}$ es definida negativa en x_0.*

Para terminar, veremos un teorema basado en el método de Liapunov, que permite probar en muchos casos la inestabilidad del equilibrio.

Teorema 31 (Cetaev). *Si $x_0 \in \Omega$ es un punto de equilibrio de la ecuación, y en un entorno U de x_0 está definida una función de Liapunov V para la cual se verifican las siguientes condiciones*

1. $V(x_0) = 0$,
2. *la derivada de Liapunov $\dot{V}$ es definida negativa en x_0, y*
3. *existe una sucesión $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset U \setminus \{x_0\}$ tal que*
   (a) $x_n \to x_0$ *cuando* $n \to \infty$, *y*
   (b) $V(x_n) \leq 0$ *para todo* $n \geq 1$,

   entonces x_0 es un punto de equilibrio inestable en el futuro.

Demostración. Elegimos primero $\epsilon > 0$ tal que la bola cerrada de centro x_0 y radio ϵ esté contenida en U. Vamos a demostrar que para cada $n \geq 1$, la trayectoria $\varphi(t, x_n)$, no puede estar contenida en esta bola. Esto impide que x_0 sea estable: para cualquier $\delta > 0$ hay puntos a distancia menor que δ de x_0 tales que su trayectoria no se mantiene a distancia menor que ϵ.

Como veremos, la prueba se reduce a probar la siguiente afirmación: si $y \in \mathbb{R}^n$ verifica $\| y - x_0\| < \epsilon$ y $V(y) < 0$, entonces existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, y)$ está definido, y $\| \varphi(T, y) - x_0\| > \epsilon$. Si por el absurdo, la solución maximal por el punto y tomara siempre valores en la bola cerrada de centro x_0 y radio ϵ, entonces en virtud del teorema 8, esta solución estaría definida para todo $t \geq 0$. Además, como $V(x_0) = 0$, podemos elegir $\delta > 0$ tal que $V(x) > V(y)$ para todo x tal que $\| x\| < \delta$. Si definimos para $t \geq 0$, $h(t) = V(\varphi(t, y))$, obtenemos que h es decreciente puesto que su derivada vale

$$\frac{dh}{dt}(t) = \dot{V}(\varphi(t, y)) \ ,$$

y por lo tanto deducimos que $\varphi(t, y) \in A$ para todo $t \geq 0$, donde

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \delta \leq \| x - x_0\| \leq \epsilon\} \ .$$

Como este conjunto A es compacto, y $\dot{V}$ es continua, tenemos que el valor máximo que toma $\dot{V}$ en A es

$$\alpha = \sup \left\{ \dot{V}(x) \mid \ x \in A \right\} < 0 \ .$$

Esto implica que

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\infty \ ,$$

lo cual es absurdo porque V está acotada en la bola de centro x_0 y radio ϵ. Veamos ahora lo que ocurre con los puntos de la sucesión x_n. Si $V(x_n) < 0$,

acabamos de probar que su trayectoria no puede permanecer a distancia de x_0 menor que ϵ para todo $t \geq 0$ en que esté definida. Por último, observemos que si $V(x_n) = 0$, como $\dot{V}(x_n) < 0$, tenemos que $V(\varphi(s, x_n)) < 0$ para $s > 0$ suficientemente pequeño. Pero entonces aplicando lo anterior al punto $y = \varphi(s, x_n)$, deducimos que en este caso, la trayectoria tampoco puede permanecer a distancia de x_0 menor que ϵ para todo $t \geq 0$ en que esté definida.

$\square$