Sistemas Lineales 2

Examen, febrero de 2013

Ejercicio 1

Se considera un sistema S LTI causal e internamente estable de transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$ (voltaje de salida sobre voltaje de entrada). Por no conocerse con detalle los valores de sus componentes se decide hacer un relevamiento del diagrama de Bode de su transferencia $H(j\omega)$ que se muestra en la figura 1. Se sabe que los ceros y polos están todos aproximadamente en el rango de $10^2 rad/s$ a $10^4 rad/s$.

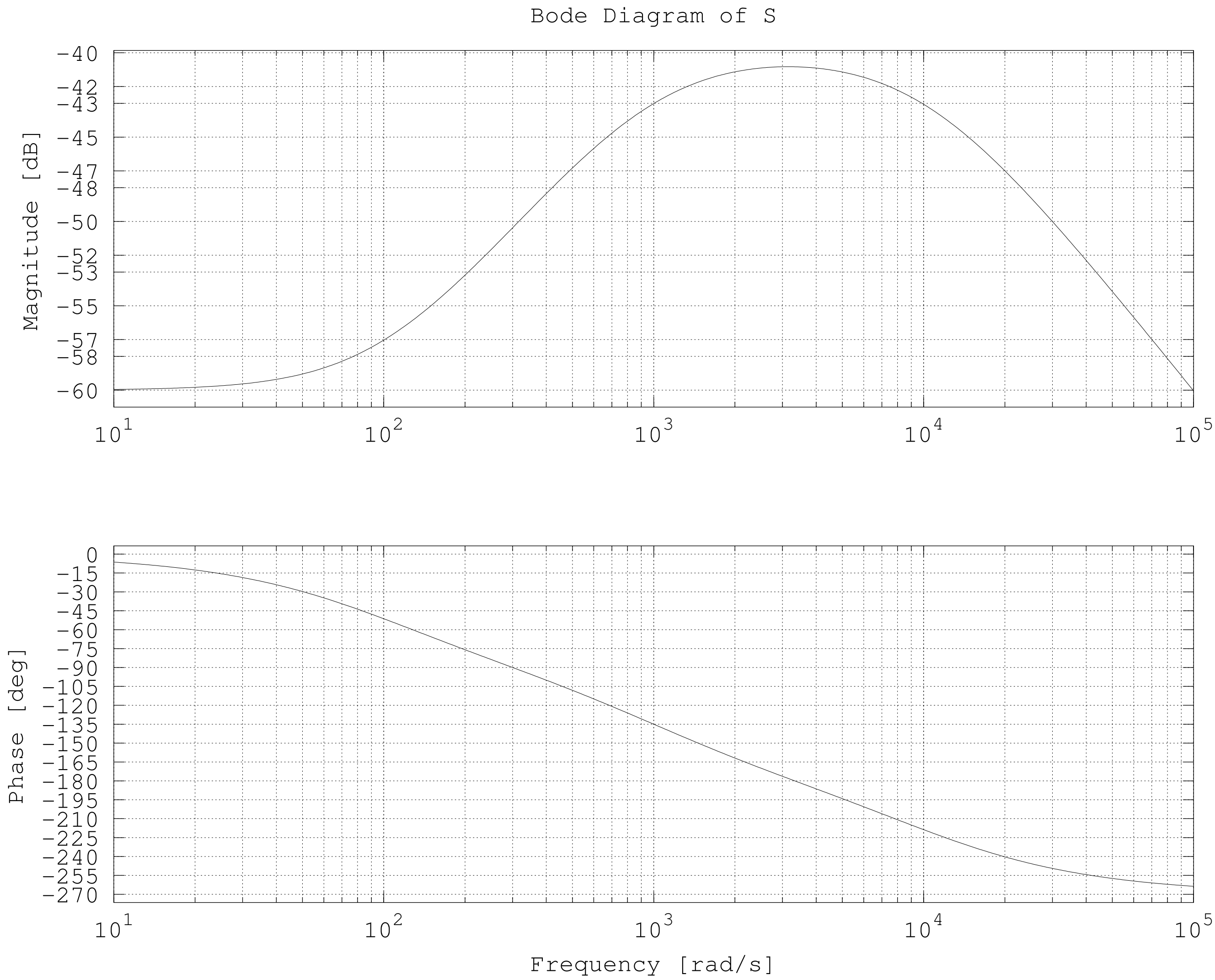


Figura 1: Diagrama de Bode de $H(j\omega)$

a) Se desea realimentar dicho sistema de forma que la salida pueda seguir lo mejor posible a una señal de referencia $u(t)$, para lo cual se realimenta según el esquema de la figura 2

i) Estudiar la estabilidad del sistema realimentado según k, utilizando el criterio de Nyquist.

ii) Para una entrada escalón unitario hallar aproximadamente el error en régimen $\left(\lim_{t\to\infty} e(t)\right)$ en función de k, donde $e(t) = u(t) - y(t)$.

iii) ¿Cuál es el error en régimen más bajo que se puede obtener?.

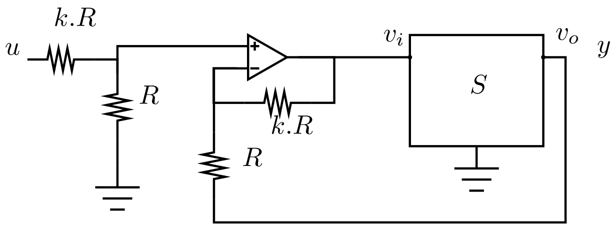


Figura 2: Sistema realimentado de la parte a)del problema 1

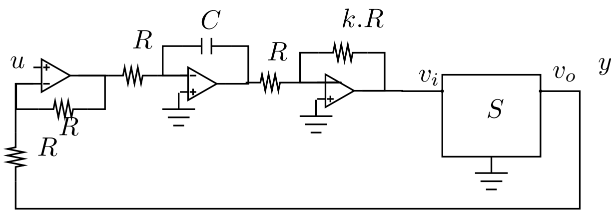


Figura 3: Sistema realimentado de la parte a)del problema 1

b) Ahora se realimenta el sistema como se muestra en la figura 3 donde $RC = 0{,}01s$.

   i) Estudiar la estabilidad del sistema realimentado según k, utilizando el criterio de Nyquist.

   ii) Para una entrada escalón unitario hallar el error $e(t) = u(t) - y(t)$, en régimen en función de k.

   iii) Considere a partir de ahora $k = 500$.
   Calcule aproximadamente el margen de ganancia.

   iv) Para la entrada $u(t) = A\cos\left(100\frac{rad}{s}t\right)$, calcule aproximadamente la salida $y(t)$ y el error $e(t)$ en régimen.

Justifique <u>Todas</u> las aproximaciones realizadas

Ejercicio 2

a) En el circuito de la figura 4 el amplificador operacional trabaja siempre saturado. El mismo es alimentado por fuentes $+/-\ V_{CC}$ y el condensador se encuentra inicialmente descargado. Calcular y bosquejar la tensión de salida v_o^1 para todo tiempo positivo. Determinar el instante de tiempo cuando el sistema alcanza el régimen.

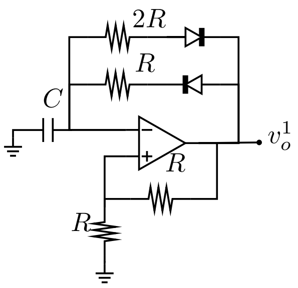


Figura 4:

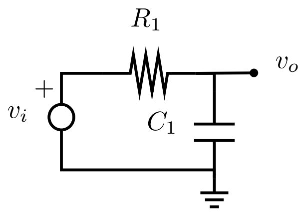


Figura 5:

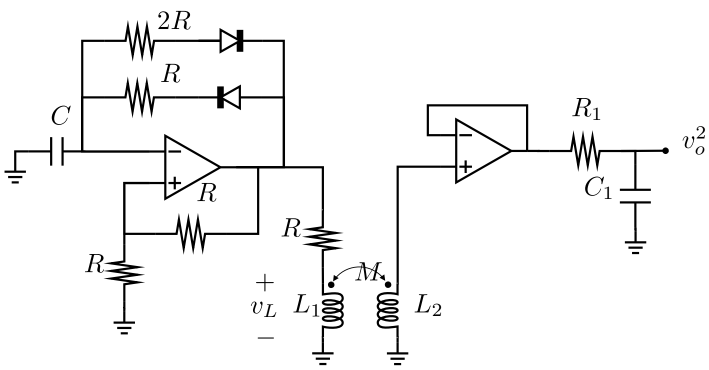


Figura 6:

b) Considere el filtro de la figura 5.

   i) Utilizando la definición de estabilidad interna, determine si el filtro es o no internamente estable.

   ii) Determine si el filtro es BIBO estable. Justifique.

   Considere ahora el circuito de la figura 6, en el que se cumplen las siguientes relaciones: $L_1 = L_2 = 2M$.

c) Calcular y graficar la tensión v_L sobre la bobina primaria solo cuando el sistema se encuentra en régimen.

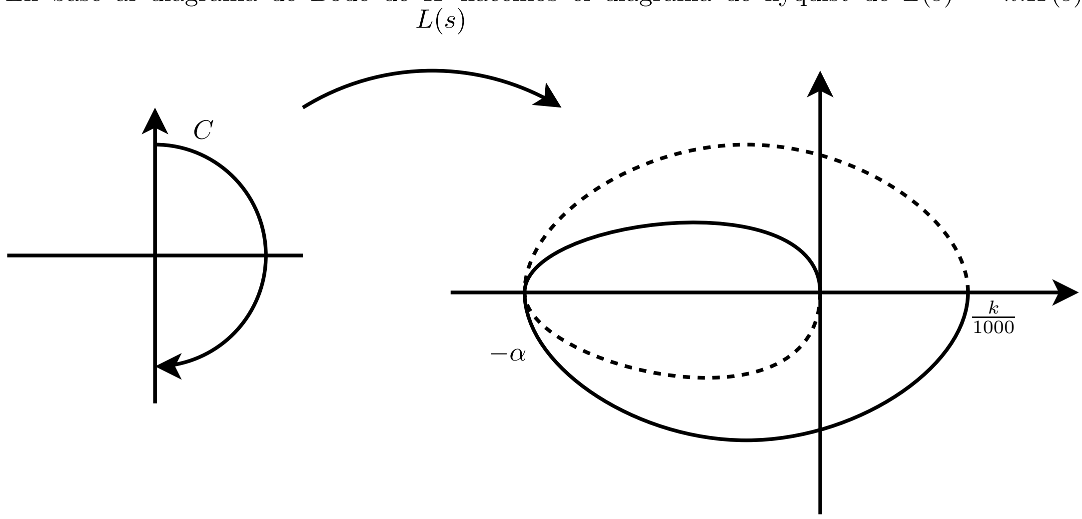
d) Calcular el valor medio de la tensión v_o^2 de salida del sistema completo.

Solución Ejercicio 1

Se considera un sistema S LTI causal e internamente estable de transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$ (voltaje de salida sobre voltaje de entrada). Por no conocerse con detalle los valores de sus componentes se decide hacer un relevamiento del diagrama de Bode de su transferencia $H(j\omega)$ que se muestra en la figura 1. Se sabe que los ceros y polos están todos aproximadamente en el rango de $10^2 rad/s$ a $10^4 rad/s$.

a) i) La transferencia de lazo abierto queda: $G_{OL} = -k.H(s)$

En base al diagrama de Bode de H hacemos el diagrama de nyquist de $L(s) = k.H(s)$



El mismo parte de -60 db para frecuencias chicas, o sea en $L(0) = k.H(0) = \frac{k}{1000}$. Luego observamos que el punto de corte con el eje real negativo, es decir cuando la fase es -180^o se da cuando el módulo en db es aproximadamente -41, es decir $\alpha = -L(j\omega_x) = -H(j\omega_x) = \frac{8{,}9k}{1000}$

Como sabemos que S es estable L no tiene polos encerrados por la curva $\mathcal{C}$. Por lo tanto para que el sistema en lazo cerrado sea estable se debe cumplir que el diagrama de Nyquist no encierre al -1, es decir $\alpha = \frac{8{,}9k}{1000} < 1$ o sea $k < \frac{1000}{8{,}9} = 112$

ii) Calculamos la transferencia de lazo cerrado H_{CL}

$$Y(s) = H(s)\left(U(s) - kY(s)\right) \quad \therefore \quad H_{CL}(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$

$$E(s) = \left(1 - \frac{H(s)}{1 + L(s)}\right) U(s)$$

Como el sistema es estable $\frac{1}{1+L(s)}$, no tiene polos en el semiplano derecho, el único polo de $E(s)$ es el de la transformada del escalón por lo que $sE(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho. Por lo tanto estamos en condiciones de aplicar el teorema del valor final.

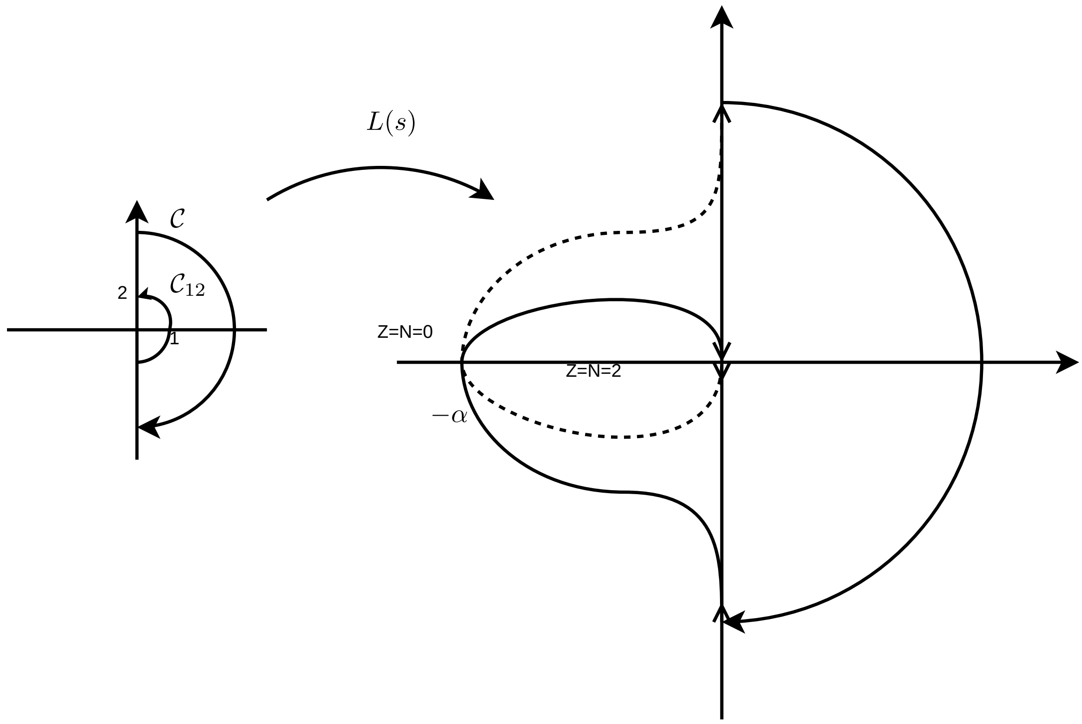
$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to\infty} E(s) = 1 - \frac{H(0)}{1 + L(0)} = \frac{10^{-3}}{1 + \frac{k}{1000}} = 1 - \frac{1}{1000 + k}$$

iii) Por la relación entre el error en régimen y k, el mínimo error se da para el k mas chico posible ($k = 0$), curiosamente esto es cuando no hay realimentación , es decir que el mínimo error en régimen alcanzable es $e^{reg}_{min} = 1 - \frac{1}{1000} \simeq 0{,}999$ lo cuál es bastante grande. El sistema realimentado de esta forma no puede seguir razonablemente a la entrada.

b) i) La transferencia de lazo abierto queda $G_{OL} = -k \times -\frac{1}{RCs} \times -1 \times H(s) = -\frac{k.H(s)}{RCs}$, entonces $L(s) = 100\frac{k.H(s)}{s}$.

El diagrama de Bode de $L(j\omega)$ se construye a partir del de H, en el de módulo restando 20 db/dec y en el de fase restando 90^o

A partir del diagrama de Bode y el mapeo de la curva $\mathcal{C}_{12}$ obtenemos el diagrama de Nyquist de la figura siguiente.



$$\lim_{r\to 0} L(r.e^{j\theta}) = \frac{100kH(0)}{r.e^{j\theta}} = \frac{100kH(0)}{r}e^{-j\theta} \quad (1)$$

Cuando θ va de 0 a $\pi/2$ el argumento de $L(r.e^{j\theta}$ va de 0 a $-\pi/2$ con módulo tendiendo a infinito.

Para estudiar la estabilidad tenemos que ver nuevamente que el diagrama no encierre al -1, dado que no hay polos de $L(s)$ encerrados por $\mathcal{C}$el número de ceros es igual al número de polos $Z = N + P = N$.

Necesitamos averiguar el punto α de corte con el eje real negativo, esto se da cuando $\arg(L(\jmath\omega_x) = -180)$ que es cuando $\arg(H(\jmath\omega_x) = 90$

Mirando en el diagrama dicha frecuencia vale $\omega_x \simeq 300\frac{rad}{s}$. A esa frecuencia el módulo de H es $|H(j\omega_x)| \simeq -50{,}5db = 3\times 10^{-3}$.

$$\alpha = |L(j\omega_x)| = \frac{100k|H(j\omega_x)|}{\omega_x} = \frac{100\times 3\times 10^{-3}}{300}k = \frac{k}{1000} < 1 \quad (2)$$

Por lo tanto el sistema es estable si $k < 1000$

ii) Al igual que en la parte a calculamos G_{CL}(s)para obtener $U(s)$ y así el error.

$$Y(s) = H(s)(-k)(-\frac{1}{RCs})\,(2U(s) - Y(s)) \quad \therefore \quad G_{CL}(s) = 2\frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$E(s) = \left(1 - 2\frac{L(s)}{1+L(s)}\right)U(s) =$$

Estamos en las mismas condiciones de la parte a) para calcular el error en régimen .

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to\infty} E(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1-L(s)}{1+L(s)} = \lim_{L(s)\to\infty}\frac{1-L(s)}{1+L(s)} = 1$$

iii) Para $k = 500$, sustituyendo en la ecuación 2 tenemos que: $\alpha = \frac{1}{2}$
El margen de ganancia es $MG = \frac{1}{\alpha} = 2$

iv) La transferencia en lazo cerrado del sistema es (hay que calcularla)

$$G_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2L(s)}{1+L(s)}$$

Para obtener la respuesta en régimen evaluamos $G_{CL}(j\omega)$ en la frecuencia de trabajo $\omega_0 = 100$. Primero necesitamos hallar $H(j\omega_0)$ a partir del diagrama de Bode: $\arg H(j\omega_0) \simeq -52^o$, $|H(j\omega_0)| = -57db = 1{,}4 \times 10^{-3}$

$$L(j\omega_0) = \frac{100kH(j\omega_0)}{j\omega_0} = \frac{100 \times 500 \times 1{,}4 \times 10^{-3}}{100} \measuredangle -(52+90)^o = -(0{,}55 + j0{,}43)$$

$$G_{CL}(j\omega_0) = \frac{2L(j\omega_0)}{1+L(j\omega_0)} = -(0{,}32 + 2{,}23j) = 2{,}25 \measuredangle -98^o$$

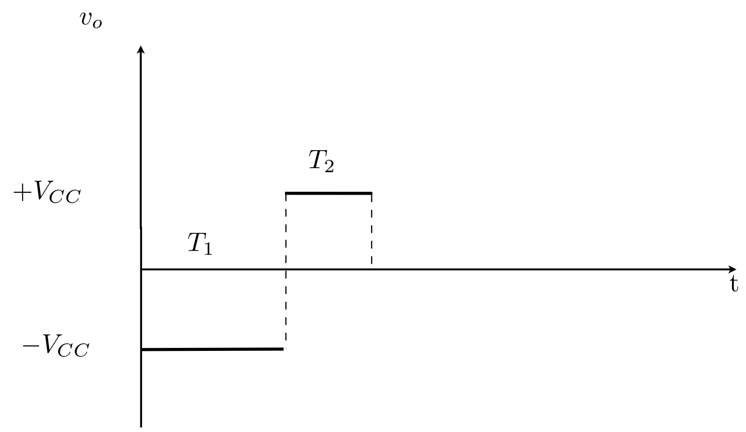
por lo tanto en régimen: $y(t) = 2{,}25A\cos(100\frac{rad}{s}t - 98^o)$
Para el error:

$$E(j\omega_0) = \frac{1-L(j\omega_0)}{1+L(j\omega_0)}U(j\omega_0) = 2{,}59A\measuredangle 59^o$$

Pasando al tiempo: $e(t) = 2{,}59A\cos(100\frac{rad}{s}t + 59^o)$

Solución Ejercicio 2

a) Inicialmente: $e^- = 0$ (tensión en el condensador) y $e^+ = \frac{V_{CC}}{2}$ (suponiendo $v_o^1 = +V_{CC}$). Entonces $e^+ \geq e^-$ (verifica).
Por lo tanto: $e^+(t) = Y(t)\frac{V_{CC}}{2}$, $e^-(t) = Y(t)V_{CC}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ (Notar que el diodo que se encuentra en ON es el que está en serie con R). Esto ocurrirá hasta un tiempo t^*: $e^+(t^*) = e^-(t^*) \Rightarrow t^* = RCln(2)$.
Desde aquí: $t^{'} = t - t^*$.
$e^+ = Y(t^{'}) - \frac{V_{CC}}{2}$, $e^-(t^{'}) = Y(t^{'})(\frac{V_{CC}}{2} + (-V_{CC} - \frac{V_{CC}}{2})(1 - e^{-\frac{t^{'}}{2RC}}))$, $v_o^1 = Y(t^{'}) - V_{CC}$ (notar que ahora el diodo en serie con $2R$ es el que se encuentra en ON). Esto ocurre hasta un tiempo t_2^* en el que $e^+(t_2^*) = e^-(t_2^*) \Rightarrow t_2^* = 2RCln(3)$.
A partir de aquí: $t_2^{'} = t - t_2^*$.
$e^+ = Y(t_2^{'})\frac{V_{CC}}{2}$, $e^-(t_2^{'}) = Y(t_2^{'})(-\frac{V_{CC}}{2} + (V_{CC} + \frac{V_{CC}}{2})(1 - e^{-\frac{t_2^{'}}{RC}}))$ hasta un tiempo $t_3^* = RCln(3)$.
De aquí en adelante el comportamiento es idéntico, conmutando cada tiempos t_2^* y t_3^*. EL régimen es alcanzado en el instante t_1^*. En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento del oscilador.



b) i) Anulando la entrada $v_i = 0$, estudiamos la evolución de los estados del sistema a partir de sus condiciones iniciales (v_C^0). La tensión en el condensador resulta: $v_C(t) = Y(t)V_C^0 e^{-\frac{t}{R_1C_1}} \to 0$ y por lo tanto SI es internamente estable.

ii) Al ser el sistema internamente estable SI es BIBO estable.

c) Las ecuaciones del trafo desde el lado primario resultan en: $v_{L_1} = L_1\frac{di_1}{dt}$ (ya que no hay corriente por el secundario). Y las del secundario en: $v_{L_2} = M\frac{di_1}{dt} = \frac{M}{L_1}v_{L_1} = \frac{1}{2}v_{L_1}$.
(Llamando T_1 y T_2 a los períodos de tiempo en que la salida del oscilador se encuentra en $-V_{CC}$ y $+V_{CC}$ respectivamente): $i_{L1}(t) = Y(t)(i_{L0} + (\frac{V_{CC}}{R} - i_{L0})(1 - e^{-\frac{t}{\frac{L_1}{R}}}))$.
$i_{L2}(t') = Y(t')(i_{L1}(T_1) + (-\frac{V_{CC}}{R} - i_{L1}(T_1))(1 - e^{-\frac{t'}{\frac{L_1}{R}}}))$.

Se debe cumplir que: $i_{L2}(T_2) = i_{L0}$. A partir de las condiciones anteriores es posible determinar el valor de i_{L0}.

d) El primario del trafo puede verse como un filtro pasa altos, desde el punto de vista de la tensión sobre la bobina. Por lo tanto La componente de continua que posee el oscilador no es transferida a la salida del filtro, es decir, a la tensión sobre el primario. Como consecuencia de este hecho, tampoco poseerá componente de continua la tensión sobre el secundario del trafo (recordar la proporcionalidad entre las tensiones primaria y secundaria). Por lo tanto, la entrada del filtro pasabajos de salida no posee componente de continua y por lo tanto la tensión de salida tampoco.