Solución del Ejercicio 2

a) La transferencia se puede calcular fácilmente usando la expresión del divisor y el amplificador en configuración no inversora:

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + 10RCs + 1}\left(1 + \frac{99}{\frac{L}{R}s + 1}\right) \tag{1}$$

$$= \frac{100 + \frac{L}{R}s}{\left(LCs^2 + 10RCs + 1\right)\left(\frac{L}{R}s + 1\right)} \tag{2}$$

$$= \frac{100 + \frac{L}{R}s}{\left(\frac{L^2}{100R^2}s^2 + \frac{L}{10R}s + 1\right)\left(\frac{L}{R}s + 1\right)} \tag{3}$$

b) Para llevarlo a la forma pedida normalizamos todos los polinomios con el coeficiente de mayor orden en 1.

$$H(s) = \frac{100\frac{R^2}{L^2}}{s + \frac{R}{L}} \frac{100\frac{R}{L} + s}{s^2 + 10\frac{R}{L}s + 100\frac{R^2}{L^2}} = \frac{100\omega_0^2}{s + \omega_0} \frac{100\omega_0 + s}{s^2 + 10\omega_0 s + 100\omega_0^2} \tag{4}$$

Donde tomamos $\omega_0 = \dfrac{R}{L}$

c) Para calcular la transferencia de lazo abierto anulamos la entrada e inyectamos una señal a la salida de cualquiera de los dos operacionales, es fácil ver que con u a tierra el operacional de la izquierda queda en configuración inversora de ganancia $-k$ y el otro bloque tiene la transferencia calculada en la parte anterior.

$$G_{OL} = -k.H(s) = -L(s)$$

Para hacer el diagrama de Nyquist primero hacemos los diagramas de Bode de $L(s)$, que se muestran en la figura 1 Según los diagramas de Bode realizamos el diagrama de Nyquist de la figura 2 Como $L(s)$ no tiene polos encerrados por la curva original, la curva mapeada no debe encerrar al -1 para ello hay que asegurarse que $\alpha < 1$

En el diagrama de Bode se puede ver que la frecuencia para la cual $L(j\omega)$ tiene argumento $-\pi$ es aproximadamente $10\omega_0$

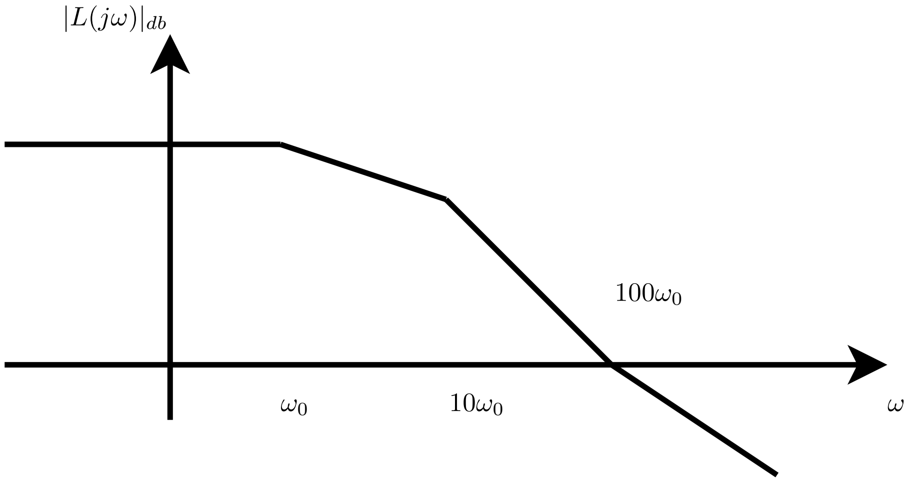
Evaluamos $L(j10\omega_0)$

$$L(10j\omega_0) = k\frac{100\omega_0^2}{10j\omega_0 + \omega_0} \frac{100\omega_0 + j10\omega_0}{-100\omega_0^2 + 10\omega_0 s + 100\omega_0^2} \tag{5}$$

$$= \frac{1000k}{100j} \frac{10 + j}{10j + 1} \simeq \frac{1000k}{100j} \frac{10}{10j} = -10k = -\alpha \tag{6}$$

Por lo tanto el sistema es estable para $k < 0{,}1$

Para hallar la condición más exactamente imponemos $L(j\omega) = -\alpha$ y vemos que condición debe cumplir k para que $\alpha < 1$.



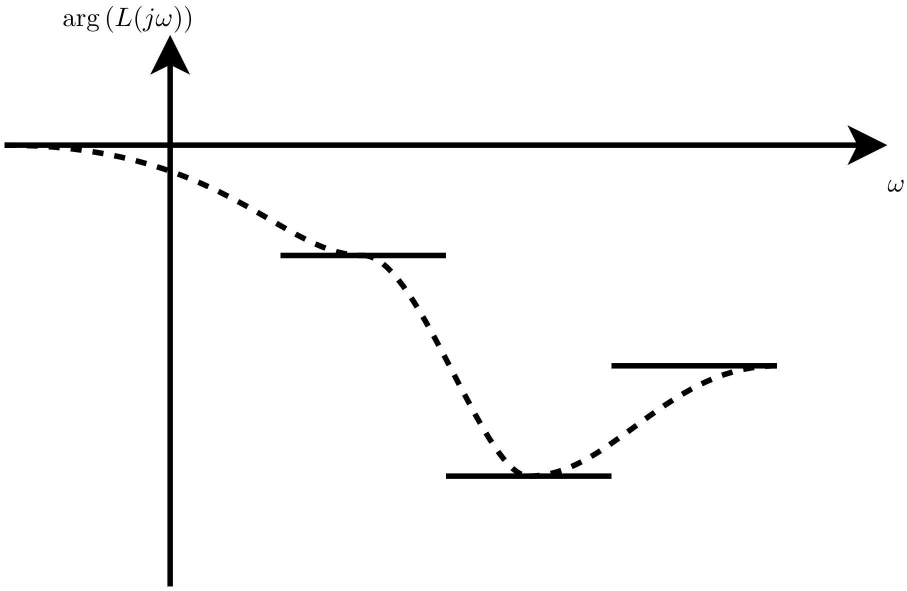


Figura 1: Diagrama de Bode del ejercicio 2

$$-\alpha = L(j\omega) = k\frac{100\omega_0^2}{j\omega+\omega_0}\frac{100\omega_0 + j\omega}{-\omega^2 + 10\omega_0 j\omega + 100\omega_0^2} \tag{7}$$

$$\Rightarrow -\alpha\left(j\omega+\omega_0\right)\left(-\omega^2 + 10\omega_0 j\omega + 100\omega_0^2\right) = 100k\omega_0^2\left(100\omega_0 + j\omega\right) \tag{8}$$

Igualando partes real e imaginaria y normalizando sobre ω_0 y α, es decir

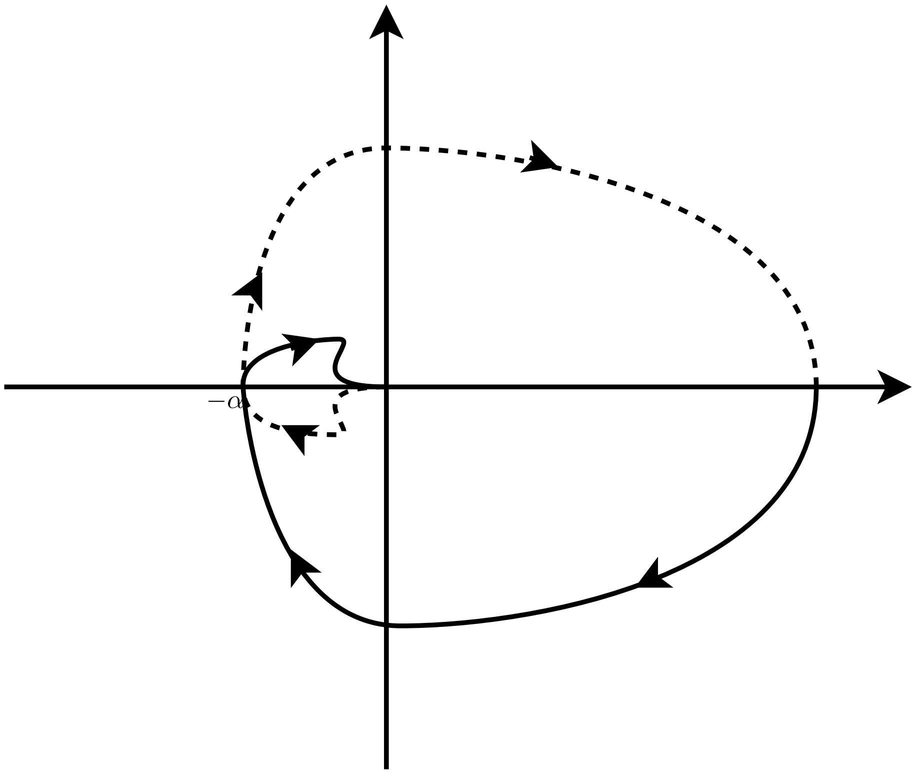


Figura 2: Diagrama de Nyquist del ejercicio 2

trabajamos con $x = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ e $y = \frac{k}{\alpha}$:

$$\text{parte imaginaria:} 110 - x = -100y \tag{9}$$

$$\text{parte real:} -11x + 100 = 10^4 y \tag{10}$$

De la ecuación 10 despejamos $x = \frac{100}{11}(100y + 1)$

Sustituyendo en 9 y operando llegamos a que $y = \frac{k}{\alpha} = \frac{1110}{8900} \simeq 0{,}1247....$ Cómo para que sea estable debe cumplirse $\alpha < 1$ entonces el sistema es estable si $k < 0{,}1247..$

Esta condición es menos restrictiva que la anterior y se debe a que en el Diagrama de Bode real de argumento la frecuencia de corte con $-\pi$ es mayor que la que dicta el asintótico debido al aporte de las otras dos raíces (ω_0 y $100\omega_0$).

d)

$$\text{Por el operacional de la derecha: } E(s) = k(U(s) - Y(s)) \tag{11}$$

$$\text{por lo dicho anteriormente: } Y(s) = H(s)E(s) \tag{12}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{E(s)}{H(s)} \tag{13}$$

$$\text{Sustituyendo 13 en 11: } E(s) = k\left(U(s) - H(s)E(s)\right) \tag{14}$$

$$\Rightarrow E(s) = U(s)\frac{k}{1+kH(s)} \tag{15}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{s}\frac{k}{1+kH(s)} \tag{16}$$

Para los casos en que el sistema es estable E(s) está en las condiciones del teorema del valor final, por lo tanto:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{k}{1+kH(s)} = \frac{k}{1+100k}$$

e) $MG = 2 = \frac{1}{\alpha}$, por la parte c) $\frac{1}{\alpha} \simeq 0{,}125k$ entonces $0{,}125k = 2$, es decir $k \simeq 16$.

$Y(s) = H(s)E(s) = \dfrac{kH(s)}{1+kH(s)} = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$, por lo tanto

$$Y(10j\omega_0) = \frac{L(10j\omega_0)}{1+L(10j\omega_0)}$$

De la ecuación 6

$$L(j10j\omega_0) = \frac{1000k}{100j}\frac{10+j}{10j+1} = 160\angle -168^o \tag{17}$$

$$Y(10j\omega_0) = \frac{L(10j\omega_0)}{1+L(10j\omega_0)} \simeq 1 \quad , \quad |L(10j\omega_0)| \gg 1 \tag{18}$$

Por lo tanto: $y(t) \simeq \cos(10\omega_0 t)$

f) Utilizando el mismo argumento que en la parte anterior pero para $\omega = 0$ (continua), tenemos que en régimen la salida es igual a la entrada por la ganancia del sistema a frecuencia nula, como el sistema es estable y la entrada es nula en régimen la salida también lo será.

También se puede argumentar por el teorema del valor final, que es esencialmente lo mismo.

Resumiendo:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} Y(s) = H_{CL}(0) \lim_{s\to 0} U(s) = 0$$