Sistemas Lineales 2

Solución Examen Julio 2011

Problema 1. —

(a) (i) $$\frac{Z_v(s)}{R} = \frac{(1+T_0^2 s^2)}{\left(\frac{2}{3}T_0^3 s^3 + T_0^2 s^2 + \frac{4}{3}T_0 s + 1\right)}$$

(ii)

$$\left(\frac{2}{3}T_0^3 s^3 + T_0^2 s^2 + \frac{4}{3}T_0 s + 1\right) =$$

$$= T_0\left(s+\frac{1}{T_0}\right)\left(\frac{2}{3}T_0^2 s^2 + \frac{1}{3}T_0 s + 1\right).$$

Así, los polos de Z_v son:

$$s = -\frac{1}{T_0} \quad , \quad y \qquad s = \frac{-1}{4T_0}\left(1 \pm j\sqrt{23}\right).$$

(iii)

$$\frac{Z_v(j\omega)}{R} = \frac{(1-T_0^2\omega^2)}{(1-T_0^2\omega^2) + j\omega \frac{2}{3}T_0(2-T_0^2\omega^2)}$$

Así, para cada $\omega \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\left|\frac{Z_v(j\omega)}{R}\right|^2 = \frac{(1-T_0^2\omega^2)^2}{(1-T_0^2\omega^2)^2 + \left(\omega\frac{2}{3}T_0\right)^2(2-T_0^2\omega^2)^2} \leq 1.$$

(iv) Sigue también que, para cada $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{Z_v(j\omega)}{R}\right\} = \frac{(1-T_0^2\omega^2)^2}{(1-T_0^2\omega^2)^2 + (\omega \frac{2}{3} T_0)^2 (2-T_0^2\omega^2)^2} \geq 0 .$$

(b)
(i)

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \\ 0 \end{pmatrix} v_I ,$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_L \end{pmatrix} + (1)\, v_I .$$

(ii) Notemos que

$$H(s) = 1 + \frac{Z_v(s)}{R} =$$

$$= 1 + \frac{(1+T_0^2 s^2)}{\left(\frac{2}{3}T_0^3 s^3 + T_0^2 s^2 + \frac{4}{3} T_0 s + 1\right)} ,$$

y dado que los polinomios num. y denom. de $\frac{Z_v}{R}$, este último de grado 3 (observemos que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$), son coprimos, entonces, en virtud de Proposición 6 la estabilidad interna del sistema bajo consideración es implicada por el hecho que Z_v no tiene polos en $\mathbb{C}^+$.

(iii) La función de transferencia $H = 1 + \frac{Z_v}{R}$ ya fue expresada explícitamente en (ii).

(iv) Como anteriormente mencionaramos, sabemos que Z_v no tiene polos en $\mathbb{C}^+$, y también, que los polos de H y de Z_v coinciden. Así, H es real-racional, propia, y no tiene polos en $\mathbb{C}^+$, lo cual implica que el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es BIBO estable.

(c)(i) $L(s) = k\,H^2(s) = k\left(1 + \frac{Z_v(s)}{R}\right)^2.$

Dado que

$$\lim_{|s| \to +\infty} L(s) = k \neq -1,$$

se verifica entonces (en virtud de Proposición 9) que la interconexión está bien definida para todo $k > 0$.

Resulta de nuestro análisis previo que L no tiene polos en $\mathbb{C}^+$, lo cual implica que $P = 0$. Resulta también de (a)(iii) y (iv) que

$$|L(j\omega)| \leq 4k, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

y además que

$$\mathrm{Re}\{L(j\omega)\} \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Así, el Gráfico de Nyquist de L no pasa por el punto $-1+j0$, y tampoco "encircula" dicho punto. Entonces, en virtud del Criterio de Estabilidad de Nyquist, la interconexión es BIBO estable para todo $k > 0$.

(ii) $$T_{cl}(s) = \frac{H(s)}{1+k\,H^2(s)} =$$

$$= \frac{\left[1 + \frac{(T_0^2 s^2+1)}{\left(\frac{2}{3}T_0^3 s^3 + T_0^2 s^2 + \frac{4}{3}T_0 s + 1\right)}\right]}{1+k\left[1 + \frac{(T_0^2 s^2+1)}{\left(\frac{2}{3}T_0^3 s^3 + T_0^2 s^2 + \frac{4}{3}T_0 s + 1\right)}\right]^2}$$

(iii) Tenemos que $T_{cl}\left(j\frac{1}{T_0}\right) = \frac{1}{1+k}$.

Así,

$$y_{ssR}(t) = \frac{1}{(1+k)}\, U_0 \cos \frac{1}{T_0} t \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+ .$$

(iv)
$$\dot{x}_1 = A\,x_1 + B\,v_{I_1}$$
$$v_{o1} = E\,x_1 + D\,v_{I_1}$$
$$\dot{x}_2 = A\,x_2 + B\,v_{o1}$$
$$v_{I_1} = -kE\,x_2 - kD\,v_{o1}$$

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A - \frac{k}{(1+kD^2)} BDE & \frac{-k}{(1+kD^2)} BE \\ \\ \frac{1}{(1+kD^2)} BE & A - \frac{k}{(1+kD^2)} BDE \end{pmatrix}$$

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC}\frac{(1+2k)}{(1+k)} & -\frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{RC}\frac{k}{(1+k)} & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{RC}\frac{1}{(1+k)} & 0 & 0 & -\frac{1}{RC}\frac{(1+2k)}{(1+k)} & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

(v)

$$T_{cl}(s) = \frac{\left[\left(\frac{2}{3}T_0^3s^3+T_0^2s^2+\frac{4}{3}T_0s+1\right)+\left(T_0^2s^2+1\right)\right]\left(\frac{2}{3}T_0^3s^3+T_0^2s^2+\frac{4}{3}T_0s+1\right)}{\left(\frac{2}{3}T_0^3s^3+T_0^2s^2+\frac{4}{3}T_0s+1\right)^2+k\left[\left(\frac{2}{3}T_0^3s^3+T_0^2s^2+\frac{4}{3}T_0s+1\right)+\left(T_0^2s^2+1\right)\right]^2}$$

$$= \frac{P_{Num,6}(s)}{P_{Denom,6}(s)} \qquad (k>0)$$

Dado que los polinomios $\left(\frac{2}{3}T_0^3s^3+T_0^2s^2+\frac{4}{3}T_0s+1\right)$ y $\left(T_0^2s^2+1\right)$ son coprimos, entonces, también lo son los polinomios $P_{Num,6}$ y $P_{Denom,6}$. Notemos además que $A_{cl} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$. Sigue entonces del estudio de estabilidad BIBO de la parte (i) y de Proposición 6 (y de Teorema 4) que para cada $k>0$ todos los valores propios de la matriz A_{cl} tienen parte real negativa.

Problema 2

a) Anulando I_2

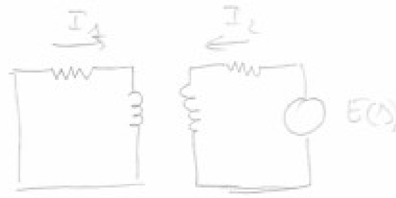
$$E_{oc}(s) = L s I_1 - L(i_{01} + i_{02}) \quad (1)$$

$$V(s) = (Ls + R) I_1 - L(i_{01}+i_{02}) \Rightarrow I_1 = \frac{i_{01} + i_{02} + V_s/L}{s + R/L}$$

Sustituyendo en (1) $\Rightarrow$ $\boxed{E_{oc}(s) = \frac{s V_s - R(i_{01}+i_{02})}{s + R/L}}$

Anulando condiciones iniciales y fuentes.

$$Z_{eq} = \frac{E(s)}{I_2(s)}$$



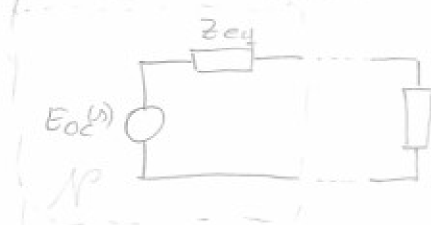
$$(R + Ls) I_1 + Ls I_2 = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{-Ls}{Ls + R} I_2$$

$$E(s) = (Ls + R) I_2 + Ls \cdot \underbrace{\frac{-Ls}{Ls+R} I_2}_{I_1} = 2R \, \frac{s + \frac{2R}{L}}{s + R/L} I_2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{eq} = 2R \cdot \frac{s + \frac{2R}{L}}{s + \frac{R}{L}}}$$

Equivalente Thévenin:

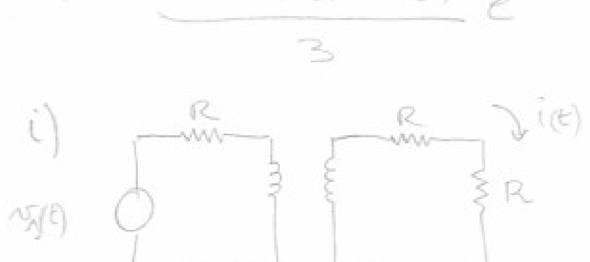


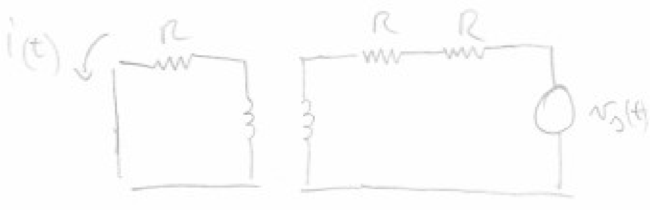
b) $V_s(s) = \frac{E}{s}$

$$V(s) = \frac{R}{R + Z_{eq}} E_{oc}(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{s + R/L}}{s + 1/\tau} \cdot \frac{E - R(i_{01}+i_{02})}{\cancel{s + R/L}} = \frac{E - R(i_{01}+i_{02})}{3(s + 1/\tau)}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{E - R(i_{01}+i_{02})}{3} e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

c) i)





Por teorema de reciprocidad ambas corrientes i(t) son iguales si las condiciones iniciales son nulas ($i_{01} = i_{02} = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{E}{3R} e^{-t/\tau}} \qquad t \geq 0$$

(ii) La impedancia vista es claramente $Z_{TH} + R$

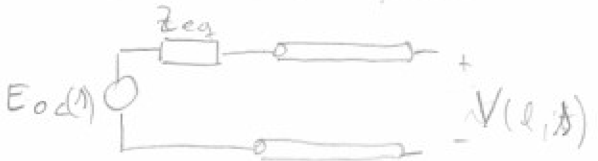
$$\Rightarrow Z_V = 3R \cdot \frac{s + 1/\tau}{s + 3/2\tau}$$

(iii) La potencia entregada por la fuente es $E \cdot i_2(t)$

$$\lim_{t \to \infty} i_2(t) = \lim_{s \to 0} \frac{E}{Z_V(s)} = \frac{E}{2R} \Rightarrow \boxed{\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{E^2}{2R}}$$

teorema valor final

d) (i)



$$\Gamma_g(s) = \frac{Z_{eq} - R}{Z_{eq} + R} = \frac{s}{3(s + 1/\tau)}$$

$$\Gamma_L(s) = 1$$

$$V(l,s) = \frac{2e^{-Ts}}{1 - \frac{s}{3(s+1/\tau)} e^{-2Ts}} \cdot \frac{s V_s}{3(s+1/\tau)} \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{3(s+1/\tau)} e^{-2Ts}} \cdot \frac{s}{s + 1/\tau} \cdot \frac{2}{3} e^{-Ts}}$$

ii) $$V(l,s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{s + 1/\tau} \cdot e^{-Ts} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{3^k (s + 1/\tau)^k} e^{-2kTs}$$

para $k = 0 \Rightarrow v_0(l,t) = \frac{2E}{3} e^{-\frac{t-T}{\tau}} \mu(t-T)$

para $k = 1 \Rightarrow v_1(l,t) = \frac{2E}{9} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{(s+1/\tau)^2} e^{-3Ts} \right\}(t) = \frac{2E}{9} e^{-\frac{t-3T}{\tau}} \left(1 - \frac{t-3T}{\tau}\right)$

notar que no entra

$$\frac{s}{(s + 1/\tau)^2} \longrightarrow \frac{d\left(t e^{-t/\tau}\right)}{dt} = e^{-t/\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

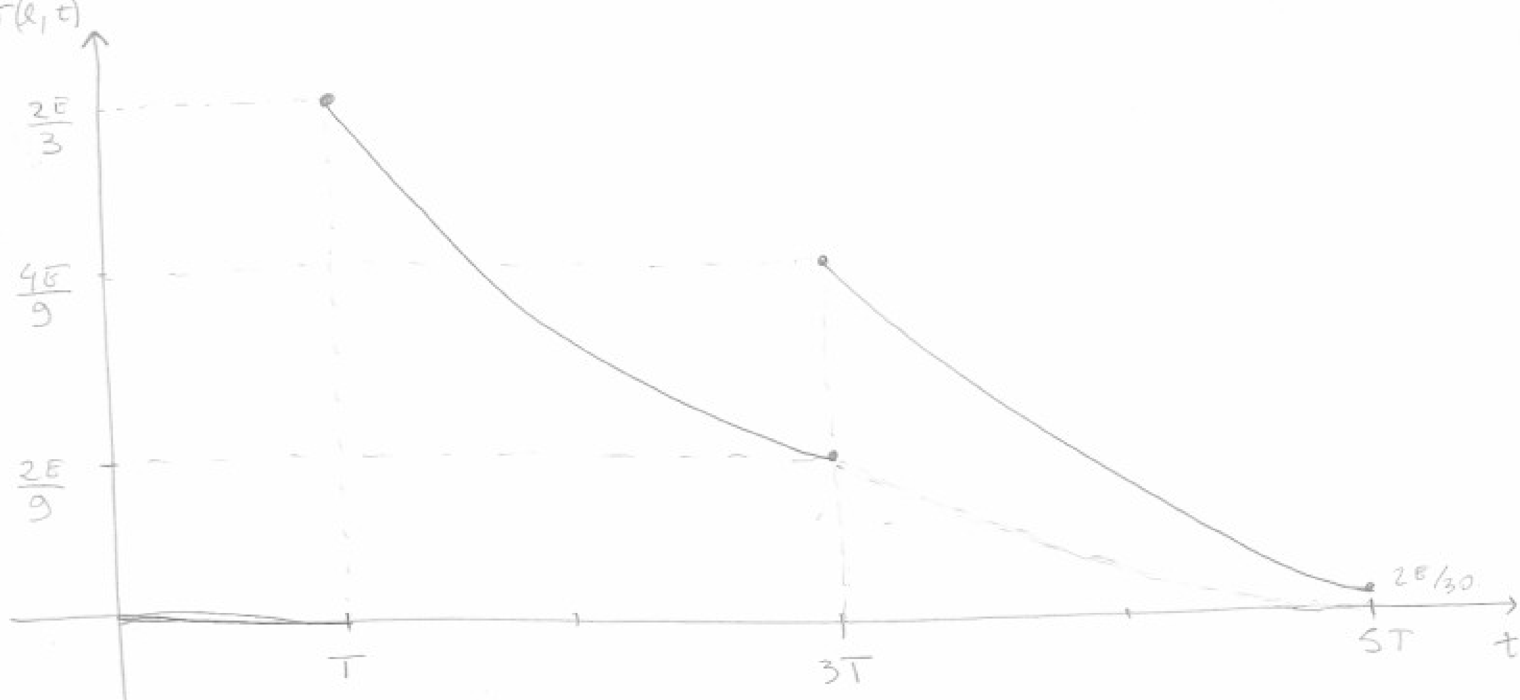
para $k > 1$ los valores temporales son nulos entre 0 y $5T$

$$\Rightarrow v(l,t) = v_0(l,t) + v_1(l,t) = \frac{2E}{3} \left[\mu(t-T) e^{-\frac{t-T}{\tau}} + \mu(t-3T) \cdot \frac{e^{-\frac{t-3T}{\tau}}}{3} \left(1 - \frac{t-3T}{\tau}\right) \right]$$

$v(l,T^-) = 0$, $v(l,T^+) = \frac{2E}{3}$, $v(l,3T^-) = \frac{2E}{3} e^{-2T/\tau} = \frac{2E}{9}$

$v(l,3T^+) = \frac{2E}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4E}{9}$ $\quad v(l,5T^-) = \frac{2E}{3}\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9}(1 - \ln 3)\right]$

$$v(l, 5T^-) = \frac{2E}{27}(2 - 1{,}1) \approx \frac{2E}{30}$$



(ii) Como esta entrada es igual a la anterior entre 0 y 4T, la salida será igual entre 0 y 5T por la causalidad del sistema y el hecho de que la bajada en 4T del pulso no se ve del otro lado de la línea por el retardo de T que esta impone.