Sistemas Lineales 2 - Examen Final Diciembre 2010

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de **un solo lado**. Resuelva problemas diferentes en **hojas diferentes**.
- Sea prolijo. **Explique** y detalle bien todos sus pasos. Exprese sus resultados exactamente **en el formato pedido**. Recuerde, que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.
- Se recuerda que para aprobar esta parte del examen es necesario tener al menos un problema completo y bien. **Revise sus respuestas**.

Problema 1.- En este problema, todos los amplificadores operacionales se modelan como ideales y además supondremos que operan en la zona lineal. Considere el circuito que se muestra en la Figura 1 en donde $R > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $L_1 > 0$, son tales que $\frac{L_1}{R} = \frac{9}{8}T_0$, $RC_2 = \frac{1}{3}T_0$, $RC_1 = \frac{8}{3}T_0$, para $T_0 > 0$ dado.

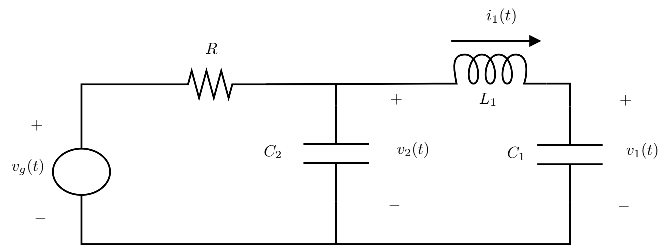

Figure 1: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(a) Halle una descripción, para el comportamiento dinámico de dicho circuito, en la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_g(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,\ x(0) = x_0\ ,$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$. La señal que se toma como salida del sistema es v_1, y la señal que se toma como entrada es v_g. Escriba la ecuación de salida en la forma

$$v_1(t) = Ex(t) + Dv_g(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ .$$

Exprese las matrices A, B, E, y D <u>solo en términos de</u> T_0, y R.

(b) Considere el sistema arriba mencionado (con entrada v_g y salida v_1). Verifique que el polinomio característico de la matriz A tiene una raíz triple.

(i) Halle la función de transferencia H de este sistema. Exprese $H(s)$ <u>solo en términos de</u> T_0 y s.

(ii) Halle la respuesta al impulso h de este sistema. Exprese $h(t)$ <u>solo en términos de</u> T_0 y t.

(iii) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_1$? Explique.

(iv) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_{1,e}$? Explique.

(c)

(i) Determine si el sistema bajo consideración es o no es internamente estable. Explique.

(ii) Determine si el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es o no es BIBO estable. Explique.

(d) Asuma aquí que $i_1(0^-) = I_1$, $v_1(0^-) = 0$, $v_2(0^-) = V_2$, y que $v_g(t) = V_0$, $t \geq 0$, donde $I_1, V_2, V_0 \in \mathbb{R}$ son dados. Halle, para este caso, la respuesta <u>completa</u> $v_1(t)$ para todo $t \geq 0$. Exprese su resultado <u>solo en términos de</u> RI_1, V_2, V_0, T_0, y t.

(e) Considere ahora el circuito mostrado en Figura 2, en donde $L_2 > 0$ es tal que $\frac{L_2}{R} = T_0$, y en donde $k > 0$. Se requiere estudiar la estabilidad BIBO de este sistema que esta conformado por la interconexión de circuitos lineales e invariantes en el tiempo. A tales efectos, las partes **(i)** y **(ii)**, que siguen, conciernen a este estudio.

(i) Halle la función de transferencia L correspondiente a esta interconexión. Exprese $L(s)$ solo en términos de k, T_0 y s.

(ii) Haga el gráfico de Nyquist correspondiente, y use el Criterio de Estabilidad de Nyquist a efectos de determinar para que valores de $k > 0$ la interconexión es BIBO estable. (Atención: No use aproximaciones en este análisis.)

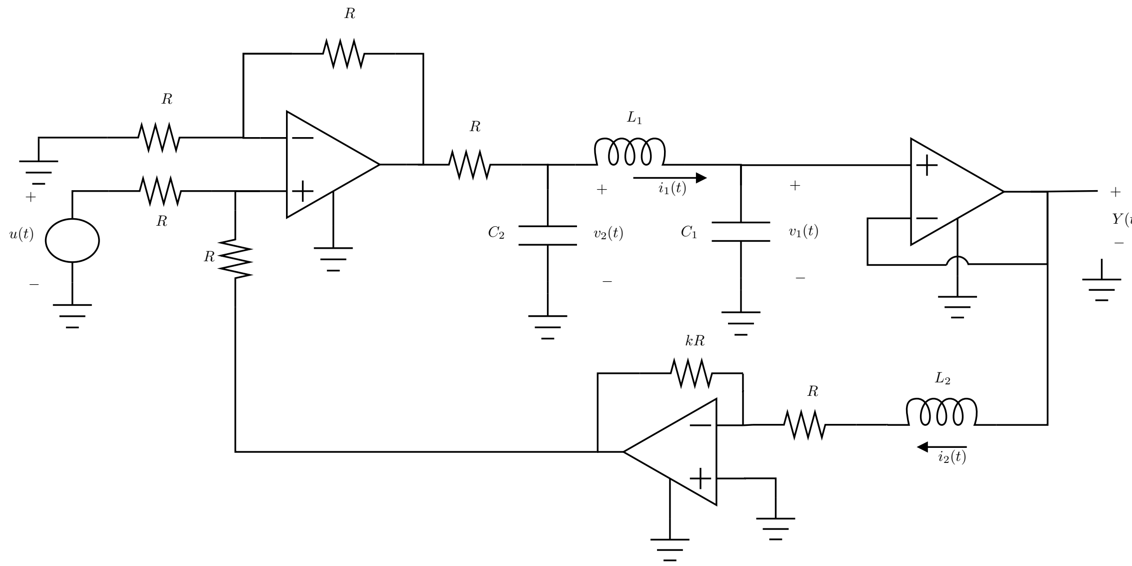

Figure 2: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(f) El comportamiento dinámico del sistema de Figura 2 se puede describir a través de

$$\dot{z}(t) = A_{Cl}z(t) + B_{Cl}u(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ , \ z(0) = z_0 \ ,$$
$$y(t) = E_{Cl}z(t) + D_{Cl}u(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

con $z(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$.

(i) Halle la matriz A_{Cl} solo en términos de k, T_0, y R. (Se sugiere usar la parte **(a)**.)

(ii) Halle la función de transferencia que relaciona la entrada u con la salida y. Exprese dicho resultado, $T_{Cl}(s)$, solo en términos de k, T_0, y s.

(iii) Determine para que valores de $k > 0$ se verifica que el sistema de Figura 2 es internamente estable. Explique.

Problema 2.- En este problema, todos los amplificadores operacionales se modelan como ideales, y todos los diodos se modelan como ideales.

(a) Considere el circuito de la Figura 3 en donde se cumple que $V_{CC} > E > 0$. En la entrada + del amplificador operacional se conecta una fuente de tensión v_i donde $v_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y cuyo gráfico restringido al intervalo $[0, T_1 + T_2]$ es como el que se muestra en Figura 4 : $v_i(t) > 0$, $\forall t \in (0, T_1)$, y $v_i(t) < 0$, $\forall t \in (T_1, T_1 + T_2)$. Asumiremos que el capacitor C está inicialmente descargado.

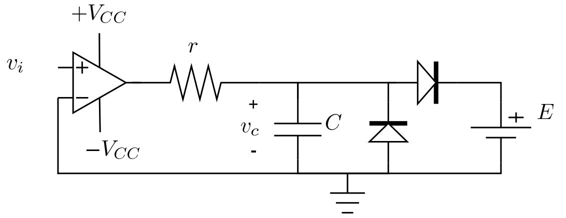

Figure 3: Circuito Correspondiente al Problema 2.

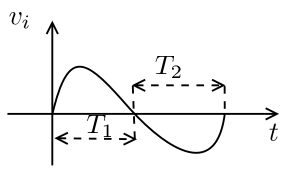

Figure 4: Circuito Correspondiente al Problema 2.

(i) Hallar el valor mínimo de T_1, $T_{1,\min}$, que asegura que $v_C(T_1) = E$. Dado que $T_1 \geq T_{1,\min}$, hallar el valor mínimo de T_2, $T_{2,\min}$, que asegura que $v_C(T_1 + T_2) = 0$. Exprese sus resultados <u>solo en términos de</u> V_{CC}, E, y $\tau = rC$.

(ii) Asumiendo que $T_1 > T_{1,\min}$, y $T_2 > T_{2,\min}$, hallar y graficar $v_C(t)$ para $t \in [0, T_1 + T_2]$.

(b) Considere el circuito de la Figura 5, con la llave S abierta, en donde además asumiremos que las condiciones son tales que aseguran que los amplificadores operacionales A_2, A_3, y A_4 operan en la zona lineal. Además, en dicho circuito se verifica que $C_1 = C_2 = C$, y $\frac{L}{R} = RC$.

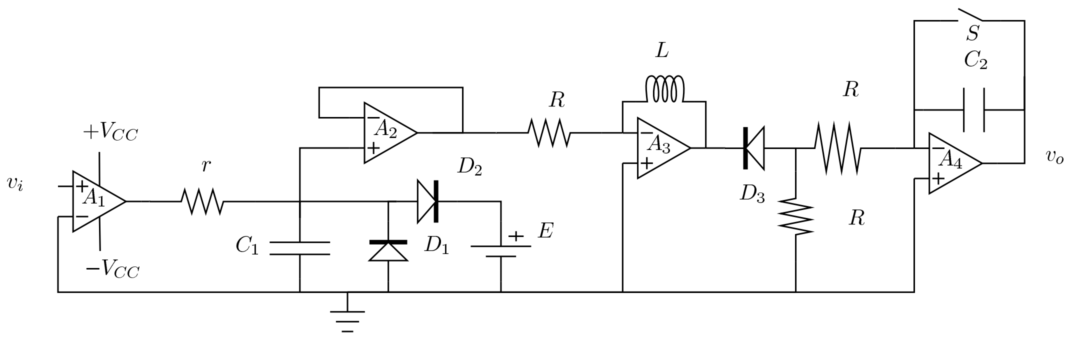

Figure 5: Circuito Correspondiente al Problema 2.

(i) Supongamos que L y C_1 están inicialmente en reposo y que se cumple que $v_O(0^-) = nE$, donde $n \in \mathbb{N}$ es dado. Supongamos que en la entrada + del amplificador operacional A_1 se conecta la misma fuente de tensión que en **(a)** (y cuyo grafico se muestra en Figura 4) la cual cumple que $T_1 > T_{1,\min}$, y $T_2 > T_{2,\min}$. Bajo estas condiciones, hallar y graficar $v_O(t)$ para $t \in [0, T_1 + T_2]$.

(ii) Supongamos que L, C_1, y C_2 están inicialmente relajados. Supongamos que en la entrada + del amplificador operacional A_1 se conecta una fuente de tensión v_i donde $v_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y cuyo gráfico restringido al intervalo $[t_0, t_n]$ (donde $n \in \mathbb{N}$, es dado) es como el que se muestra en

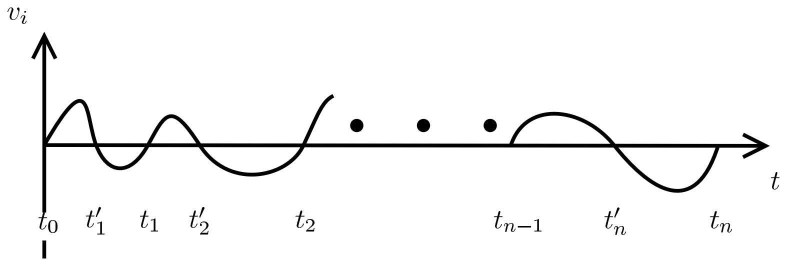

Figure 6: Circuito Correspondiente al Problema 2.

Figura 6. Como lo ilustra Figura 6, aquí tenemos que $t_0 = 0$, y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que

$$v_i(t) > 0 \ , \ \forall t \in (t_{i-1}, t'_i) \ ,$$
$$v_i(t) < 0 \ , \ \forall t \in (t'_i, t_i) \ .$$

Adicionalmente, la señal v_i es tal que se verifican las siguientes condiciones:

$$t'_i - t_{i-1} > T_{1,\min} \ , \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ ,$$
$$t_i - t'_i > T_{2,\min} \ , \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

Bajo estas condiciones, hallar $v_O(t_i)$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Explique detalladamente su análisis.

(c) Considere el circuito de la Figura 5, en donde, como en **(b)**, asumiremos que las condiciones son tales que aseguran que los amplificadores operacionales A_2, A_3, y A_4 operan en la zona lineal. Además, también asumiremos que en dicho circuito se verifica que $C_1 = C_2 = C$, y $\frac{L}{R} = RC$. Aquí, la llave S es operada periodicamente. Dicha llave se cerrará solo en los tiempos $0, T, 2T, 3T, \ldots$, donde $T > 0$ es dado, y permanecerá cerrada por intervalos de tiempo suficientemente pequeños (para descargar C_2) que a los efectos de nuestro análisis asumiremos nulos. Asumiremos además, que en el circuito de Figura 5, la constante de tiempo $\tau = rC$ es lo suficientemente pequeña como para considerarla despreciable, pero positiva, a los efectos del análisis que aquí vamos a realizar. Supongamos que L, C_1, y C_2 están inicialmente relajados. Supongamos que en la entrada + del amplificador operacional A_1 se conecta una fuente de tensión v_i donde $v_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es

$$v_i(t) = V_0 \sin \frac{2\pi}{T_0} t \ ,$$

donde $V_0 > 0$, y $T_0 > 0$ es tal que $T = N_0 T_0$ con $N_0 \in \mathbb{N}$. Bajo estas condiciones:

(i) Grafique $v_O(t)\, , \, t \geq 0$. (A efectos de simplificar su gráfico puede elegir $N_0 = 3$, o $N_0 = 4$, o $N_0 = 5$.)

(ii) Halle el valor medio de la tensión de salida, $\frac{1}{T} \int_0^T v_O(t) dt$. Exprese dicho resultado solo en términos de E, y N_0.

(d) Considere ahora el circuito de Figura 7 bajo las mismas condiciones e hipótesis (que aquí son aplicables) que las asumidas en **(c)** con respecto al circuito de Figura 5. Supongamos que L, C_1, y C_2 están inicialmente relajados, y además que en $t = 0^-$ la tensión de salida de A_1 es $v_x(0^-) = -V_{CC}$. Supongamos que en la entrada + del amplificador operacional A_1 se conecta una fuente de tensión v_i donde $v_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y está definida como

$$v_i(t) = \frac{V_{CC}}{2} \sin\big(\frac{2\pi}{T_0} t\big) + v_N(t) \ ,$$

donde $T_0 > 0$ es dado y v_N es una señal de ruido que cumple que $|v_N(t)| < \frac{V_{CC}}{10}$, $\forall t \geq 0$. Bajo estas condiciones:

(i) Para $k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, y asumiendo aquí que $v_N = 0$, grafique en el intervalo $[0, 4T_0]$ las tensiones $v_x(t)$ y $v_O(t)$.

(ii) Hallar un rango de valores para el parámetro k tal que, para cualquier señal de ruido v_N (que cumpla las restricciones arriba especificadas), garantice que la tensión de salida del circuito cumpla que

$$v_O(nT_0) = nE \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \, .$$

Explique su razonamiento.

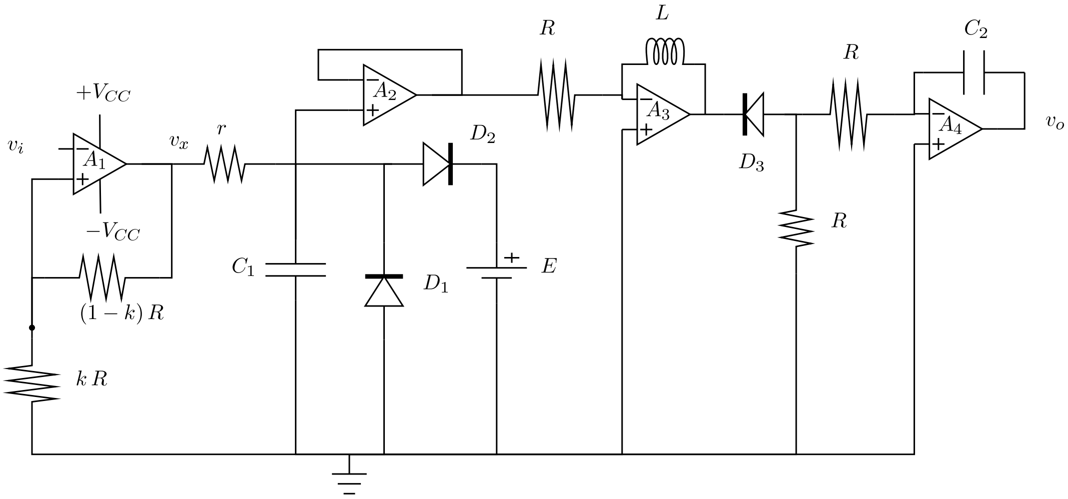

Figure 7: Circuito Correspondiente al Problema 2.