Sistemas Lineales 2

Solución Examen Diciembre 2010

Problema 1.-

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{9}\frac{1}{T_0 R} & \frac{8}{9}\frac{1}{T_0 R} \\ \frac{3}{8}\frac{R}{T_0} & 0 & 0 \\ -3\frac{R}{T_0} & 0 & -\frac{3}{T_0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{T_0} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0 .$$

(b) $$P_A(\lambda) = \det\{(\lambda I - A)\} = \left(\lambda + \frac{1}{T_0}\right)^3 .$$

(i)

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^3} \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \frac{3}{8}\frac{R}{T_0}\left(s+\frac{3}{T_0}\right) & s\left(s+\frac{3}{T_0}\right)+\frac{8}{3}\frac{1}{T_0^2} & \frac{1}{3}\frac{1}{T_0^2} \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow H(s) = \frac{1}{T_0^3}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^3} .$$

(ii) $$h(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{T_0^3} t^2 e^{-\frac{t}{T_0}} \mu(t) .$$

(iii) y (iv) $h \in \mathcal{L}_{01} \subset \mathcal{L}_{01,e}$.

(c)

(i) A tiene valor propio triple $\lambda = -\frac{1}{T_0}$.

Así, A no tiene valores propios en $\mathbb{C}^+$ y por tanto (Teorema 4), el sistema bajo consideración <u>es internamente estable</u>.

(ii) El resultado anterior implica, en virtud del Corolario 5, que el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, <u>es BIBO estable</u>.

(d)

$$V_1(s) = \underbrace{E\,(sI-A)^{-1}\begin{pmatrix} I_1 \\ \overset{0}{V_1} \\ V_2 \end{pmatrix}}_{V_{1_{ZIR}}(s)} + \underbrace{H(s)\,\frac{V_0}{s}}_{V_{1_{ZSR}}(s)}$$

$$V_{1_{ZIR}}(s) = \frac{\overset{0}{V_1}}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)} + \frac{\left(\overset{0}{\frac{V_1}{T_0}} + \frac{3}{8}\frac{RI_1}{T_0}\right)}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^2} +$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\overset{0}{\frac{V_1}{T_0^2}} + \frac{3}{4}\frac{RI_1}{T_0^2} + \frac{1}{3}\frac{V_2}{T_0^2}\right)}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^3}.$$

$$V_{1_{ZSR}}(s) = \frac{V_0}{s} - \frac{V_0}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)} - \frac{V_0}{T_0}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^2} - \frac{V_0}{T_0^2}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^3}\,.$$

$$v_1(t) = v_{1_{ZIR}}(t) + v_{1_{ZSR}}(t)\,,\quad t \geq 0.$$

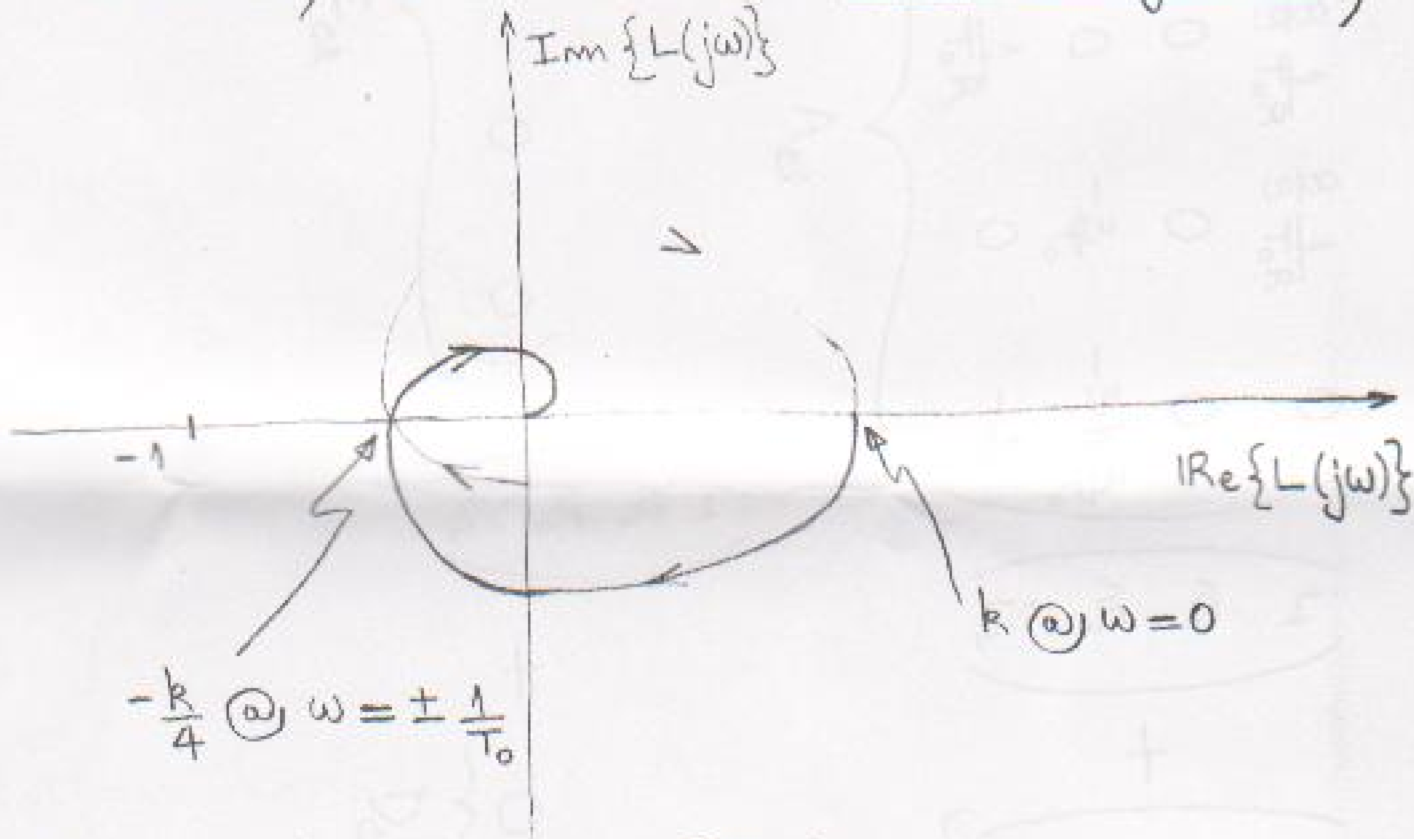
$$v_{1_{ZIR}}(t) = \left[\overset{=0}{V_1} + \left(\overset{=0}{V_1} + \frac{3}{8} R I_1\right)\frac{t}{T_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\underset{=0}{V_1} + \frac{3}{4} R I_1 + \frac{1}{3} V_2\right)\frac{t^2}{T_0^2}\right] e^{-\frac{t}{T_0}}\,,\quad t \geq 0.$$

$$v_{1_{ZSR}}(t) = V_0 - V_0\left[1 + \frac{t}{T_0} + \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{T_0^2}\right] e^{-\frac{t}{T_0}}\,,\quad t \geq 0.$$

c)

(i) $L(s) = k \frac{1}{T_0^4} \frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_0}\right)^4}$.

(ii) (Note que dado que L es estrictamente propia, entonces, la interconexión está bien definida.)



En este caso tenemos que $P=0$.
Sigue inmediatamente de este gráfico de Nyquist, y del Criterio de Estabilidad de Nyquist, que la interconexión es BIBO estable si y solo si $0 < k < 4$.

(Recordar que nuestro análisis de estabilidad está confinado para valores de $k > 0$.)

(f)

(i)
$$\begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{8}{9}\frac{1}{T_0 R} & \frac{8}{9}\frac{1}{T_0 R} & 0 \\ \frac{3}{8}\frac{R}{T_0} & 0 & 0 & 0 \\ -3\frac{R}{T_0} & 0 & -\frac{3}{T_0} & -3k\frac{R}{T_0} \\ 0 & \frac{1}{T_0 R} & 0 & -\frac{1}{T_0} \end{pmatrix}}_{A_{cl}} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{T_0} \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_{cl}} u \;,$$

$$Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{cl}} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} + \underbrace{0}_{D_{cl}} u \;.$$

$$T_{cl}(s) = \frac{H(s)}{(1+L(s))} = \frac{\frac{1}{T_0^3}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_0})^3}}{\left[1 + k\frac{1}{T_0^4}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_0})^4}\right]} =$$

$$\frac{1}{T_0^3}\frac{(s+\frac{1}{T_0})}{\left[(s+\frac{1}{T_0})^4 + k\frac{1}{T_0^4}\right]}.$$

(iii) Notemos que dado que $k>0$, entonces en

$$T_{cl}(s) = \frac{P_{Num,1}(s)}{P_{Denom,4}(s)}$$

se cumple que los polinomios $P_{Num,1}$ y $P_{Denom,4}$ (de grados 1 y 4 respectivamente) son coprimos.

Notemos además que $A_{cl} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Usando nuestro analisis de estabilidad de la parte (e), sabemos que nuestro sistema, cuya función de transferencia es T_{cl}, es BIBO estable si y solo si $0<k<4$. Así, invocando Proposición 6, sigue que el sistema bajo consideración es internamente estable si y solo si $0<k<4$.

(Recordar que nuestro análisis de estabilidad está confinado para valores de $k > 0$.)