Sistemas Lineales 2 - Examen Julio 2010

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de **un solo lado**. Resuelva problemas diferentes en **hojas diferentes**.
- Sea prolijo. **Explique** y detalle bien todos sus pasos. Exprese sus resultados exactamente **en el formato pedido**. Recuerde, que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.
- Se recuerda que para aprobar esta parte del examen es necesario tener al menos un problema completo y bien. **Revise sus respuestas**.

Problema 1.- En este problema, todos los amplificadores operacionales se modelan como ideales y además supondremos que operan en la zona lineal. Considere el circuito que se muestra en la Figura 1 en donde $R > 0$, $L > 0$, $L_1 = \frac{2}{3}L$, y $L_2 = \frac{3}{2}L$. Convenientemente definimos $\tau = \frac{L}{R}$.

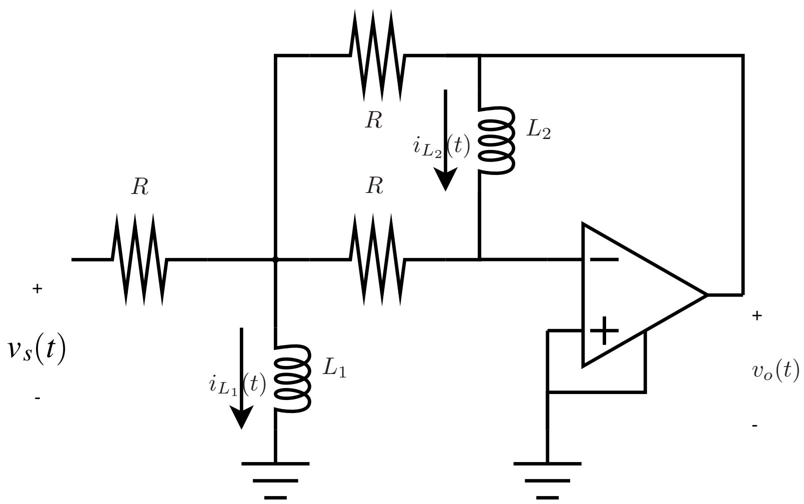

Figure 1: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(a) Halle una descripción, para el comportamiento dinámico de dicho circuito, en la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_S(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,\ x(0) = x_0\ ,$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{pmatrix}$. La señal que se toma como salida del sistema es $y(t) = v_O(t)$, y la señal que se toma como entrada es $v_S(t)$. Escriba la ecuación de salida en la forma

$$y(t) = Ex(t) + Dv_S(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ .$$

Exprese la matriz A <u>solo en términos de</u> τ, y B, E, y D <u>solo en términos de</u> τ y R.

(b) Halle para el sistema arriba mencionado (con entrada v_S y salida v_O) la respuesta al impulso h, y también $H = \mathcal{L}\{h\}$. Exprese $h(t)$ <u>solo en términos de</u> τ y t, y $H(s)$ <u>solo en términos de</u> τ y s. Responda a las siguientes preguntas, explicando en cada caso.

(i) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_{1,e}$?

(ii) ¿Acaso $h \in \mathbb{A}_e$?

(iii) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_1$?

(iv) ¿Acaso $h \in \mathbb{A}$?

(c)

(i) Determine si el sistema bajo consideración es o no es internamente estable. Explique.

(ii) Determine si el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es o no es BIBO estable. Explique.

(d) Asuma aquí que $i_{L1}(0^-) = \frac{V_1}{R}$, $i_{L2}(0^-) = \frac{V_2}{R}$, y que $v_S(t) = V$, $t \geq 0$. Halle, para este caso, la respuesta $y(t)$ para todo $t \geq 0$. Exprese su resultado solo en términos de V_1, V_2, V, τ, y t.

(e) Considere ahora el circuito mostrado en Figura 2 en donde $k > 0$, y $C > 0$ es tal que $RC = \tau$. Se requiere estudiar la estabilidad BIBO de este sistema que esta conformado por la interconexión de circuitos lineales e invariantes en el tiempo. A tales efectos, las partes **(i)** y **(ii)**, que siguen, conciernen a este estudio.

(i) Halle la función de transferencia L correspondiente a esta interconexión. Exprese $L(s)$ solo en términos de k, τ y s .

(ii) Haga el gráfico de Nyquist correspondiente, y use el Criterio de Estabilidad de Nyquist a efectos de determinar para que valores de $k > 0$ la interconexión es BIBO estable. (Atención: No use aproximaciones en este análisis.)

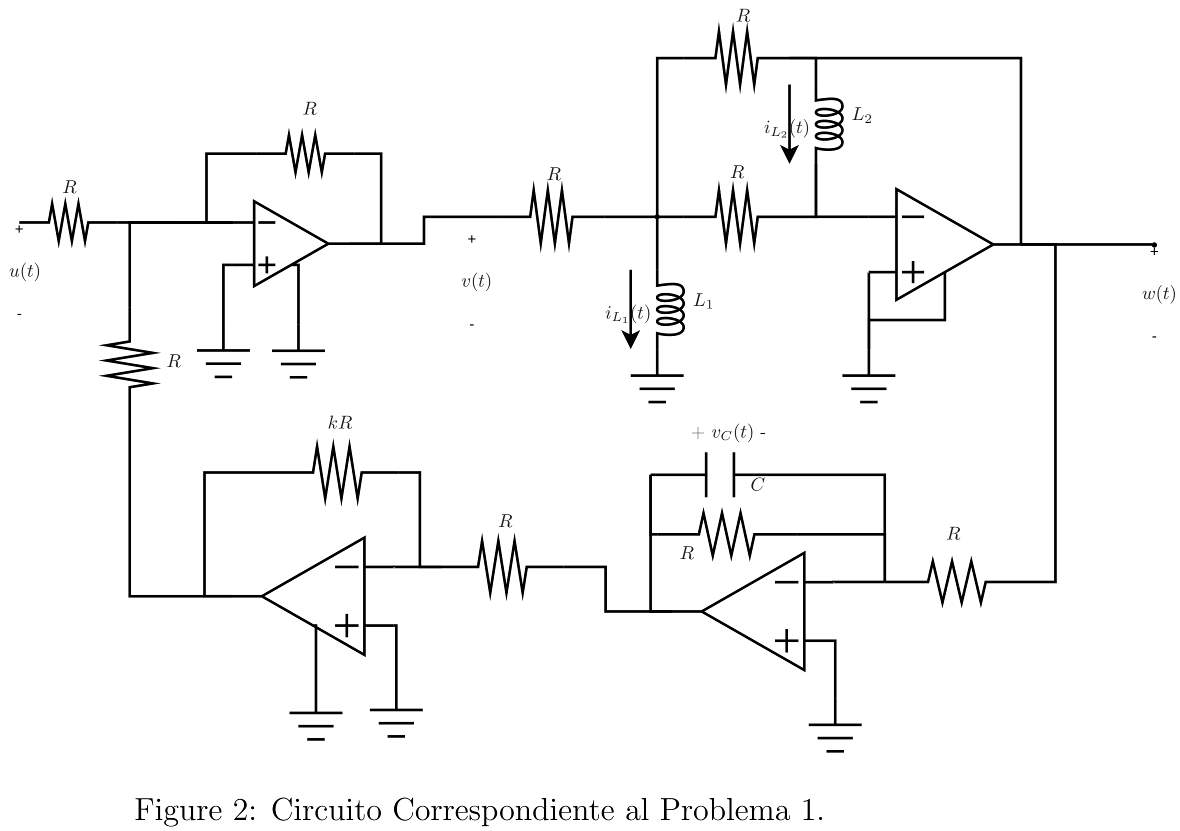

Figure 2: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(f) El comportamiento dinámico del sistema de Figura 2 se puede describir a través de

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_{Cl}z(t) + B_{Cl}u(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ , \ z(0) = z_0 \ , \\ w(t) &= E_{Cl}z(t) + D_{Cl}u(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ , \end{aligned}$$

con $z(t) = \begin{pmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix}$.

(i) Halle la matriz A_{Cl} solo en términos de k, R, y τ. (Se sugiere usar la parte **(a)**.)

(ii) Halle la función de transferencia que relaciona la entrada $U = \mathcal{L}\{u\}$ con la salida $W = \mathcal{L}\{w\}$. Exprese dicho resultado, $T_{Cl}(s)$, solo en términos de k, τ, y s.

(iii) Determine para que valores de $k > 0$ se verifica que todos los valores propios de la matriz A_{Cl} tienen parte real negativa. Explique.

Problema 2.- Considere el circuito $\mathcal{N}$ mostrado en la Figura 3 (en donde $R > 0$ y $C > 0$) el cual se muestra conectado a una carga arbitraria a través de dos terminales 1 y $1'$ según muestra dicha Figura 3. Además, en dicho circuito $\mathcal{N}$ se asumirá genéricamente que $v_1(0^-) = v_{01}$.

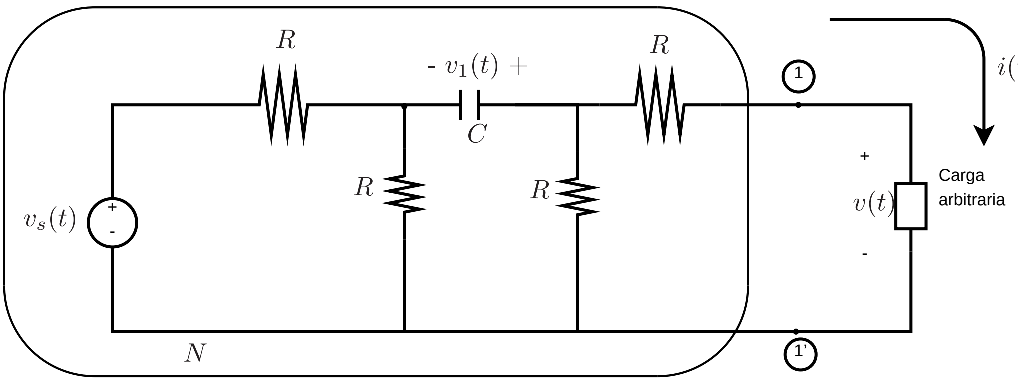

Figure 3: Circuito Correspondiente al Problema 2.

(a) Halle el Circuito Equivalente de Thévenin, en el dominio de Laplace, al circuito $\mathcal{N}$ (de Figura 3) desde el punto de vista de los terminales 1 y $1'$. Dibuje dicho Circuito Equivalente de Thévenin y halle explícitamente los elementos que lo componen. Exprese dichos elementos solo en términos de R, C, v_{01}, $V_S(s) = \mathcal{L}\{v_S(t)\}(s)$, y de s.

(b) Halle el Circuito Equivalente de Norton, en el dominio de Laplace, al circuito $\mathcal{N}$ (de Figura 3) desde el punto de vista de los terminales 1 y $1'$. Dibuje dicho Circuito Equivalente de Norton y halle explícitamente los elementos que lo componen. Exprese dichos elementos solo en términos de R, C, v_{01}, $V_S(s) = \mathcal{L}\{v_S(t)\}(s)$, y de s.

(c) Asumiremos aquí que $v_S(t) = V_0$, $t \geq 0$. Use lo hallado en cualquiera de las partes anteriores para hallar, en los siguientes dos casos, $v(t)$ para todo $t \geq 0$:

(i) Caso en el cual la carga arbitraria que se muestra en Figura 3 es un capacitor con capacitancia $\frac{C}{4}$, el cual esta inicialmente descargado.

(ii) Caso en el cual la carga arbitraria que se muestra en Figura 3 es un resistor cuya resistencia es R.

Exprese ambos resultados <u>solo en términos de</u> V_0, v_{01}, $\tau = RC$, y t.

(d) Considere el circuito de la Figura 4, el cual se encuentra inicialmente relajado, y en donde la fuente i_S esta definida como $i_S(t) = I_0$, $t \geq 0$. Use lo hallado en la parte **(c)** (o en su

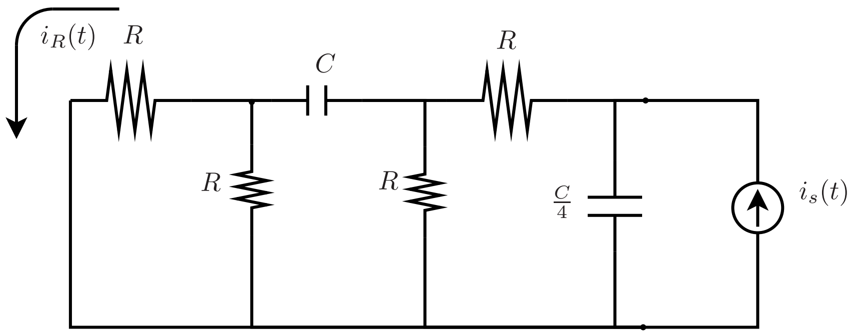

Figure 4: Circuito Correspondiente al Problema 2.

defecto, use algún otro método) para hallar $i_R(t)$ para todo $t \geq 0$. Exprese su resultado <u>solo en términos de</u> I_0, τ, y t.

(e) Asumiremos ahora que la carga arbitraria que se muestra en Figura 3 es una linea de transmisión, sin perdidas, de longitud $l > 0$, con impedancia característica $Z_0 = R$ y velocidad de fase $v_P > 0$, inicialmente relajada, y en cuyo extremo $z = l$ se conecta como carga un resistor cuya resistencia es $R_L = 3R$. El extremo $z = 0$ de la linea de transmisión se conecta a los terminales 1 y 1′, así $v(0,t) = v(t)$ (donde $v(t)$ se muestra en Figura 3). Asumiremos que $v_{01} = 0$, y por conveniencia definimos $T = \frac{l}{v_P}$.
Bajo estas condiciones generales:

(i) Halle la función de transferencia, H, correspondiente al sistema cuya entrada es $v_S(\cdot)$ y cuya salida es $v(l,\cdot)$. Exprese $H(s)$ <u>solo en términos de</u> τ, T y s.
Recuerde que la transformada de Laplace de la solución general de las Ecuaciones del Telegrafista para una linea de transmisión sin perdidas que esta inicialmente en reposo (y esta conectada a una red con generador y a una red de carga inicialmente en reposo) es

$$V(z,s) = V_+(s)\, e^{-\frac{z}{v_P}s} + V_-(s)\, e^{\frac{z}{v_P}s} \ , \ I(z,s) = \frac{1}{Z_0}\big(V_+(s)\, e^{-\frac{z}{v_P}s} - V_-(s)\, e^{\frac{z}{v_P}s}\big) \ , \text{ donde}$$

$$V_+(s) = \frac{1}{(1-\Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-\frac{2l}{v_P}s})}\frac{Z_0}{(Z_0+Z_g(s))}V_g(s) \ , \ V_-(s) = V_+(s)\Gamma_L(s)e^{-\frac{2l}{v_P}s} \ .$$

(ii) Determine si el sistema considerado en la parte **(i)** (cuya función de transferencia es H) es o no es BIBO estable. Explique.

(iii) Asumiendo ahora que $v_S(t) = V_0$, $t \geq 0$, donde $V_0 > 0$ es dado, halle $v(l,t)$ en el intervalo $[0, 5T)$. Exprese dicho resultado <u>solo en términos de</u> V_0, τ, T y t.