Sistemas Lineales 2 - Examen Febrero 2010

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de **un solo lado**. Resuelva problemas diferentes en **hojas diferentes**.
- Sea prolijo. **Explique** y detalle bien todos sus pasos. Exprese sus resultados exactamente **en el formato pedido**. Recuerde, que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.
- Se recuerda que para aprobar esta parte del examen es necesario tener al menos un problema completo y bien. **Revise sus respuestas**.

Problema 1.- En este problema, todos los amplificadores operacionales se modelan como ideales y además supondremos que operan en la zona lineal. Considere el circuito que se muestra en la Figura 1 en donde $R > 0$ y $C_1 = C_2 = C > 0$. Convenientemente definimos $\tau = RC$.

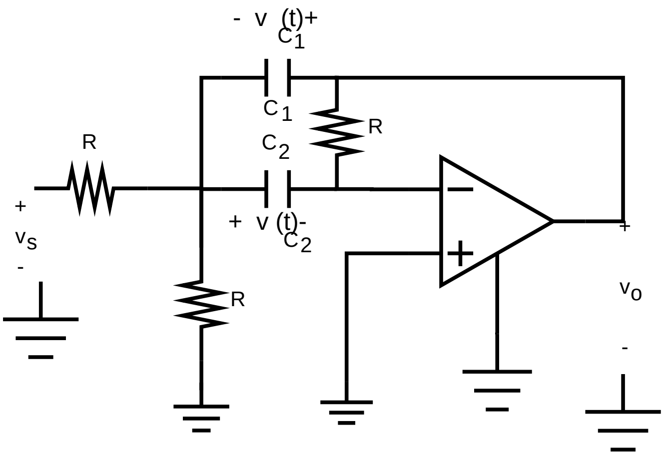

Figure 1: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(a) Halle una descripción, para el comportamiento dinámico de dicho circuito, en la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_S(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ , \ x(0) = x_0 \ ,$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \end{pmatrix}$. La señal que se toma como salida del sistema es $y(t) = v_O(t)$, y la señal que se toma como entrada es $v_S(t)$. Escriba la ecuación de salida en la forma

$$y(t) = Ex(t) + Dv_S(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Exprese las matrices A, B, E, y D <u>solo en términos de</u> τ.

(b) Halle para el sistema arriba mencionado (con entrada v_S y salida v_O) la respuesta al impulso h, y también $H = \mathcal{L}\{h\}$. Exprese $h(t)$ <u>solo en términos de</u> τ y t, y $H(s)$ <u>solo en términos de</u> τ y s. Responda a las siguientes preguntas, explicando en cada caso.

(i) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_1$?

(ii) ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_{1,e}$?

(c)

(i) Determine si el sistema bajo consideración es o no es internamente estable. Explique.

(ii) Determine si el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es o no es BIBO estable. Explique.

(d) Asuma aquí que $v_{C1}(0^-) = V_1$, $v_{C2}(0^-) = V_2$, y que $v_S(t) = V$, $t \geq 0$. Halle, para este caso, la respuesta $y(t)$ para todo $t \geq 0$. Exprese su resultado <u>solo en términos de</u> V_1, V_2, V, τ, y t.

(e) Considere ahora el circuito mostrado en Figura 2 en donde $k > 0$. Se requiere estudiar la estabilidad BIBO de este sistema que esta conformado por la interconexión de circuitos lineales e invariantes en el tiempo. A tales efectos, las partes **(i)** y **(ii)**, que siguen, conciernen a este estudio.

(i) Halle la función de transferencia L correspondiente a esta interconexión. Exprese $L(s)$ <u>solo en términos de</u> k, τ y s.

(ii) Haga el gráfico de Nyquist correspondiente, y use el Criterio de Estabilidad de Nyquist a efectos de determinar para que valores de $k > 0$ la interconexión es <u>BIBO estable</u>. (Atención: No use aproximaciones en este análisis.)

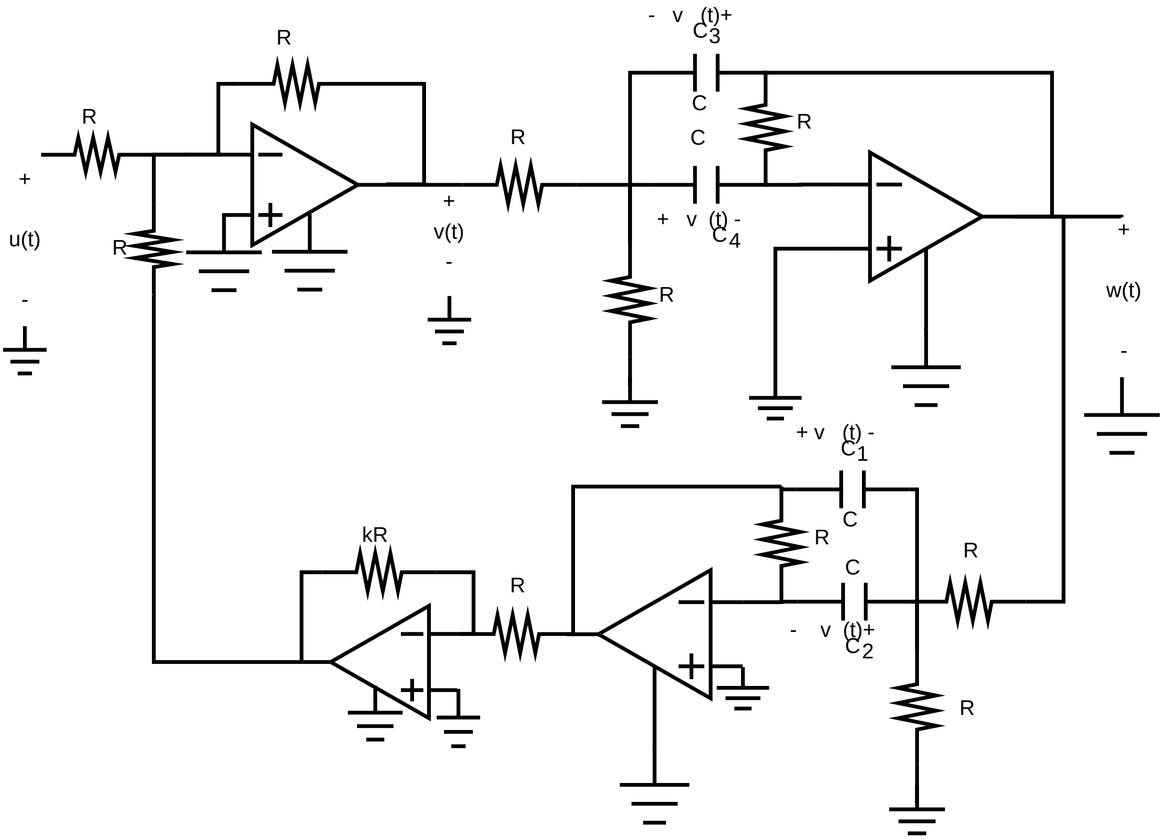

Figure 2: Circuito Correspondiente al Problema 1.

(f) El comportamiento dinámico del sistema de Figura 2 se puede describir a través de

$$\dot{z}(t) = A_{Cl} z(t) + B_{Cl} u(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ , \ z(0) = z_0 \ ,$$
$$w(t) = E_{Cl} z(t) + D_{Cl} u(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

con $z(t) = \begin{pmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \\ v_{C3}(t) \\ v_{C4}(t) \end{pmatrix}$.

(i) Halle la matriz A_{Cl} solo en términos de k, y τ. (Se sugiere usar la parte **(a)**.)

(ii) Halle la función de transferencia que relaciona la entrada $U = \mathcal{L}\{u\}$ con la salida $W = \mathcal{L}\{w\}$. Exprese dicho resultado, $T_{Cl}(s)$, solo en términos de k, τ, y s.

(iii) Determine para que valores de $k > 0$ se verifica que todos los valores propios de la matriz A_{Cl} tienen parte real negativa. Explique.

(iv) Sea $k > 0$ dado y tal que el sistema de Figura 2 es BIBO estable. Halle la respuesta en régimen, w_{ssr}, de dicho sistema, cuando este es excitado con

$$u(t) = U_0 \cos \frac{\sqrt{2}}{\tau} t \ , \ t \geq 0 \ .$$

Exprese $w_{ssr}(t)$ solo en términos de U_0, k, τ, y t.

Problema 2.- En este problema, todos los amplificadores operacionales se modelan como ideales.

(a) Considere una linea de transmisión, sin perdidas, de longitud $l > 0$, con impedancia característica $Z_0 > 0$, velocidad de fase $v_P > 0$, e inicialmente relajada. Por conveniencia se define $T_d = \frac{l}{v_P}$. Dicha linea de transmisión constituye un circuito dos-puertas $\mathcal{N}$ que se muestra en Figura 3. En dicha Figura se muestran los terminales 1 y $1'$ en el extremo $z = 0$, y 2 y $2'$ en el extremo $z = l$ de la linea de transmisión.

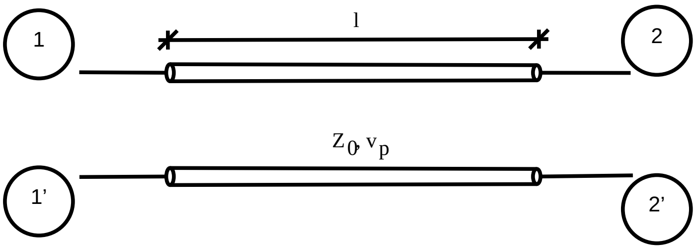

Figure 3: Circuito Correspondiente al Problema 2.

(i) Halle los parámetros de transmisión, $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$, del circuito dos-puertas $\mathcal{N}$ de Figura 3. Exprese dichos parámetros solo en términos de T_d, Z_0, y s.

(ii) Calcule $\det\{T(s)\}$, donde $T(s)$ es la matriz de transmisión de $\mathcal{N}$. ¿ Que puede afirmar acerca del circuito dos-puertas $\mathcal{N}$? Explique.

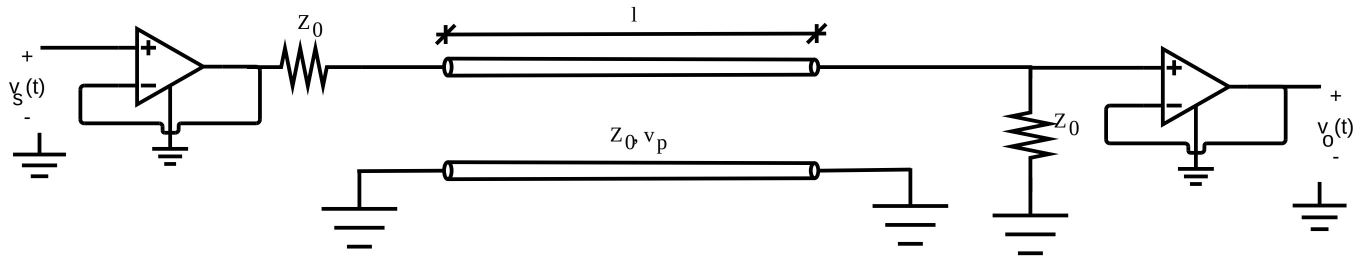

Figure 4: Circuito Correspondiente al Problema 2.

(b) Considere el circuito mostrado en Figura 4 en donde la linea de transmisión que aparece es la de la parte **(a)** y en donde los amplificadores operacionales operan en la zona lineal.

(i) Halle para el sistema arriba mencionado (con entrada v_S y salida v_O) la respuesta al impulso h, y también $H = \mathcal{L}\{h\}$.

(ii) Responda a las siguientes preguntas, explicando en cada caso: ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_1$? ¿Acaso $h \in \mathcal{L}_{1,e}$? ¿Acaso $h \in \mathbb{A}$? ¿Acaso $h \in \mathbb{A}_e$?

(iii) Determine si el sistema bajo consideración es o no es BIBO estable. Explique.

(iv) Halle para este sistema la respuesta a una excitación escalón $v_S(t) = V\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (donde $\mu(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0\ , & t < 0 \\ 1\ , & t \geq 0 \end{array} \right.$). Grafique prolijamente dicha respuesta v_O.
¿Acaso dicha respuesta $v_O \in \mathcal{L}_1$? Explique.
¿Acaso dicha respuesta $v_O \in \mathcal{L}_{1,e}$? Explique.

(c) Considere el circuito de la Figura 5, en donde $R > 0$, $V_{CC} > 0$, el diodo D se modela como ideal, y además el amplificador operacional que se muestra opera como comparador. El Circuito 1 es el circuito mostrado en Figura 4. (Recuerde que la linea de transmisión que compone el Circuito 1 esta inicialmente relajada.) Se supondrá además, que V_{CC} es menor que el modulo de las tensiones de alimentación de los operacionales que componen el Circuito 1.

(i) Explique el funcionamiento del circuito de Figura 5.

(ii) Halle $v_O(t)$ para todo $t \geq 0$. Exprese $v_O(t)$ solo en términos de T_d, V_{CC}, y t.

(iii) Grafique prolijamente $v_O(t)$ para todo $t \geq 0$.

(d) Considere el circuito de la Figura 6, en donde el Circuito 2 es el circuito mostrado en Figura 5, y donde como anteriormente $V_{CC} > 0$ es menor que el modulo de las tensiones de alimentación del amplificador operacional que se muestra en dicha Figura 6. Se supondrá además que se cumple que $\frac{L}{R} = T_d$.

(i) Halle para este circuito (y para todo $t \geq 0$) las tensiones $v_1(t)$, $v_2(t)$, y las corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$, en régimen. Exprese todos sus resultados solo en términos de T_d, V_{CC}, R, y t.

(ii) Grafique prolijamente $v_1(t)$ e $i_1(t)$ para todo $t \geq 0$.

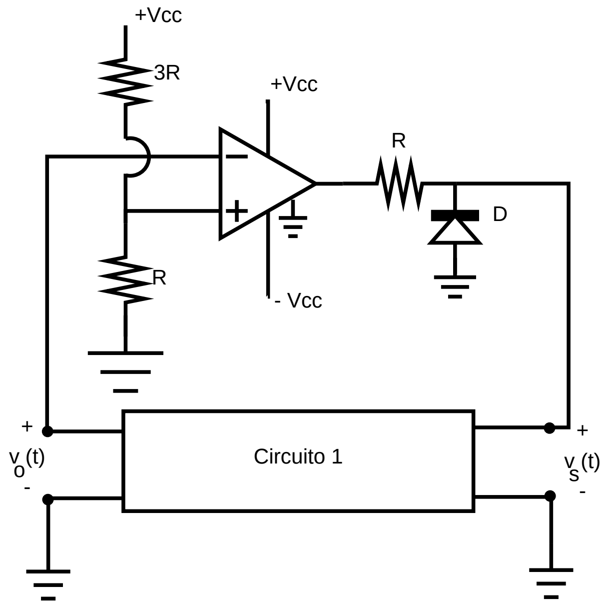

Figure 5: Circuito Correspondiente al Problema 2.

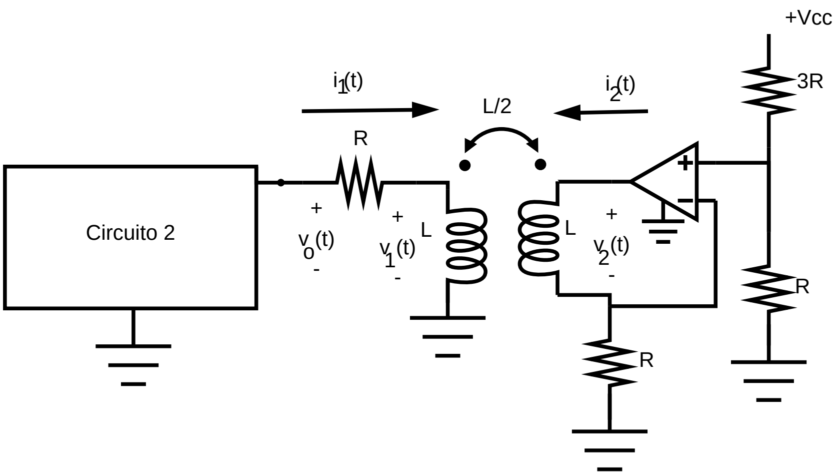

Figure 6: Circuito Correspondiente al Problema 2.

Recuerde que la transformada de Laplace de la solución general de las Ecuaciones del Telegrafista para una linea de transmisión sin perdidas que esta inicialmente en reposo (y esta conectada a una red con generador y a una red de carga inicialmente en reposo) es

$$V(z,s) = V_+(s)\, e^{-\frac{z}{v_P}s} + V_-(s)\, e^{\frac{z}{v_P}s} \ , \ I(z,s) = \frac{1}{Z_0}\big(V_+(s)\, e^{-\frac{z}{v_P}s} - V_-(s)\, e^{\frac{z}{v_P}s}\big) \ , \ \text{donde}$$

$$V_+(s) = \frac{1}{(1-\Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-\frac{2l}{v_P}s})}\frac{Z_0}{(Z_0+Z_g(s))}V_g(s) \ , \ V_-(s) = V_+(s)\Gamma_L(s)e^{-\frac{2l}{v_P}s} \ .$$