Sistemas Lineales 2 - Examen julio/2009

Equipo docente

15/07/2009

a) Sean los cuadripolos de la figura 1, hallar g para que ambos sean equivalentes, sabiendo que el amplificador operacional funciona en zona lineal.

Sugerencia: usar los parmetros generales.

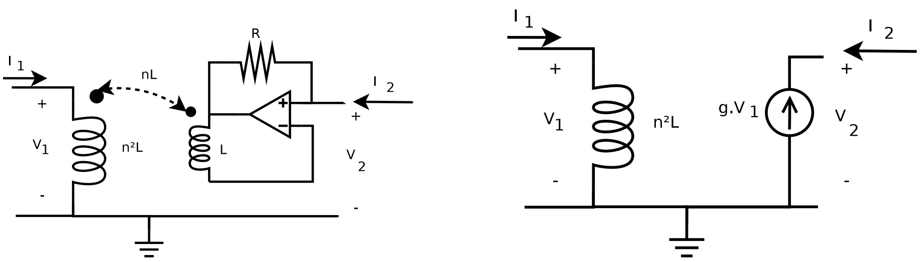

Figura 1: cuadripolos

En el cuadripolo de la derecha:

$$I_2 = -gV_1 \quad \Rightarrow V_1 \quad = \quad \overbrace{0}^{A}.V_2 - \overbrace{\frac{1}{g}}^{B} I_2 \tag{1}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{n^2Ls} = -\frac{I_2}{gn^2Ls} \quad \Rightarrow I_1 \quad = \quad \overbrace{0}^{C}.V_2 - \overbrace{\frac{1}{gn^2Ls}}^{D} I_2 \tag{2}$$

En el cuadripolo de la izquierda la corriente por el secundario I_{L2} es nula debido a la impedancia de entrada infinita del operacional:

$$\left.\begin{array}{r} V_1 = n^2Ls.I_1 + n^2Ls.\overbrace{I_2}^{0} \\ V_2 = nLs.I_1 + Ls.\overbrace{I_2}^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{L2} = \frac{V_1}{n}$$

El operacional funciona en zona lineal por lo tanto hay cortocircuito virtual entre las entradas, esto hace que la caida de voltaje en la resistencia sea igual a V_{L2}. Nuevamente por la impedancia de entrada infinita la corriente por la resistencia es I_2 por lo tanto por ley de Ohm:

$$I_2 = -\frac{V_{L2}}{R} = -\frac{V_1}{nR} \quad \Rightarrow V_1 \quad = \quad \overbrace{0}^{A'} .V_2 - \overbrace{nR}^{B'} I_2 \tag{3}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{n^2Ls} = -\frac{nR.I_2}{gn^2Ls} \quad \Rightarrow I_1 \quad = \quad \overbrace{0}^{C'} .V_2 - \overbrace{\frac{R}{nLs}}^{D'} I_2 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A &= A' &= 0 \\ C &= C' &= 0 \end{aligned}$$

$$B = B' \quad \Rightarrow nR = \frac{1}{g} \quad g = \frac{1}{nR}$$

Con el valor de g hallado: $D = \dfrac{nR}{n^2Ls} = \dfrac{R}{nLs} = D'$

Como las constantes generales de ambos cuadripolos son iguales estos son equivalentes.

b) En el Circuito de la figura 2 (donde la mutua del transformador es $M = 2L$, segn se indica) los operacionales estn alimentados por fuentes $\pm V_{CC}$. En $t = 0$ el operacional A1 est saturado a $+Vcc$ y el condensador y las bobinas comienzan descargados.

   I) Determinar el estado inicial del operacional A2 (*justifique*).
   Antes que nada identificamos el cuadripolo de la izquierda de la parte anterior con $n = 2$, por lo que la caída de voltaje en la bobina L es $\dfrac{V_{cc}}{2}$ por lo tanto el voltaje en la entrada negativa del operacional A2 es $e_2^- = v_{o2} - \dfrac{V_{cc}}{2}$.
   También sabemos que el capacitor comienza descargado por lo que el voltaje en la entrada positiva es $e_2^+ = 0$
   Si suponemos que el operacional A2 está saturado a $+V_{cc}$entonces $e_2^- = v_{o2} - \dfrac{V_{cc}}{2} = V_{CC} - \dfrac{V_{CC}}{2} = \dfrac{V_{CC}}{2} > e_2^+$ por lo que el operacional no puede estar saturado a $+V_{cc}$.
   Si suponemos que el operacional A2 está saturado a $-V_{cc}$entonces $e_2^- = v_{o2} - \dfrac{V_{cc}}{2} = -V_{CC} - \dfrac{V_{CC}}{2} = -\dfrac{3V_{CC}}{2} < e_2^+$ por lo que el operacional no puede estar saturado a $-V_{cc}$.
   La única alternativa que queda es que el operacional esté en zona lineal.

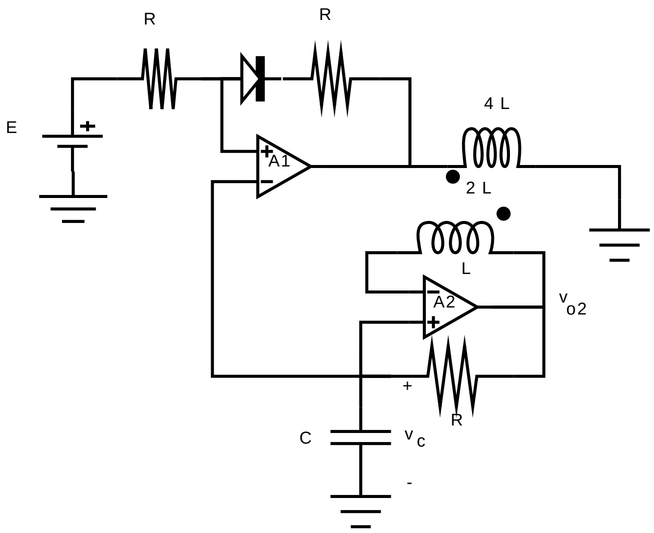

Figura 2: Circuito del problema 2

II) Hallar y graficar $v_C\left(t\right)$ (voltaje en bornes del condensador) y $v_{o2}\left(t\right)$(voltaje de salida del operacional A2) hasta el instante en que el operacional A1 cambia su estado. Asumir $V_{CC} \geq E > 0$ y que el operacional A2 se mantiene en el estado determinado en la parte anterior.

Inicialmente asumimos que el diodo está en estado cortado.

Como el voltaje de salida del operacional A1 es $+V_{CC}$ y por las resistencias no pasa corriente con el diodo cortado, obtenemos que la caída de voltaje en el diodo es $E - V_{CC} \leq 0$, por lo que este estado del diodo se verifica.

En el cuadripolo equivalente en el primario está conectada la salida del operacional A1 y en el secundario el condensador y las entradas negativa de A1 y positiva de A2, pero estas últimas no toman corriente, por lo cual la corriente por el condensador será constante $i_C = g.V_{CC}$. Donde $g = \dfrac{1}{2R}$.

De la ecuación del condensador $v_c\left(t\right) = \frac{1}{C}\int_0^t i\left(u\right)du = \dfrac{t.V_{CC}}{2RC} \quad \forall t \geq 0$.

Mientras $v_c < E$ el operacional A1 no cambia de estado, el operacional cambiará de estado en:

$$t_0 / v_c\left(t_0\right) = \frac{t_0}{2RC} = E \qquad \Rightarrow t_0 = 2RC\frac{E}{V_{CC}}$$

c) I) Hallar y graficar $v_C\left(t\right)$ y $v_{o2}\left(t\right)$ hasta llegar al régimen, asumiendo que el operacional A2 siempre trabaja en zona lineal.

En el siguiente intervalo definimos el cambio de variable $t' = t - t_0 > 0$.

El condensador comienza cargado a E asumimos que el diodo está en ON y que el operacional A1 está saturado a $-V_{CC}$.

Si el operacional está saturado a $-V_{CC}$el estado del diodo se verifica fácilmente ya que la corriente sería $I_D = \dfrac{E + V_{CC}}{2R} > 0$. Por lo que solo faltaría verificar el estado del operacional.

El voltaje en la entrada positiva es $e_1^+ = \dfrac{E - V_{CC}}{2}$ (por divisor de voltaje entre dos fuentes).

Inicialmente $v_c = E > e_1^+ = \dfrac{E - V_{CC}}{2}$ por lo cual al menos en el instante inicial se cumple la hipótesis.

La corriente por el condensador en este caso será negativa y opuesta al tramo anterior por lo que el condensador se descarga a una tasa constante $\therefore \quad v_c\left(t'\right) = E - \dfrac{V_{CC}}{2RC}t$. Esto será válido hasta que $v_C\left(t' = t_1'\right) = e_1^+ = \dfrac{E - V_{CC}}{2}$ haciendo cuentas $t_1' = RC\left(1 + \dfrac{E}{V_{CC}}\right)$.

En el siguiente período nuevamente el diodo está en OFF y el operacional A1 saturado a $+V_{CC}$ lo cual se verifica de manera análoga al primer tramo calculado en la parte a.

Sea $t'' = t' - t_1' > 0$ el condensador se vuelve a cargar a la misma tasa constante $v_C\left(t''\right) = \dfrac{E - V_{CC}}{2} + \dfrac{t.V_{CC}}{2RC}$ como la tasa de carga es la misma que la tasa de descarga del período anterior el tiempo que demora en volver a llegar a E para que A1 vuelva a cambiar de estado será el mismo que demoró el tramo anterior.

Luego de este tramo estamos en las mismas condiciones iniciales del tramo anterior por lo que llegamos al régimen. Habría que analisar la corriente por el inductor $2L$ pero dado que la corriente será la integral del voltaje de salida de A1 y en un período esta vale 0 por estar el mismo tiempo saturado a los dos voltajes opuestos, la corriente al final del período debe ser igual que a comienzo.

II) Determinar el periodo de v_C en función de E, R, C y V_{CC}.

El período será $T = 2t_1' = 2RC\left(1 + \dfrac{E}{V_{CC}}\right)$.

d) Determinar el rango de valores de E en funcin de V_{CC} para que el operacional A2 permanezca siempre en la zona lineal, de acuerdo a lo asumido en las partes anteriores.

El rango de valores debe ser tal que $|v_{o2}| \leq V_{CC} \quad \forall t$. En la gráfica se ve que esto ocurre si $E + \dfrac{V_{CC}}{2} \leq V_{CC} \quad \iff E \leq \dfrac{V_{CC}}{2}$

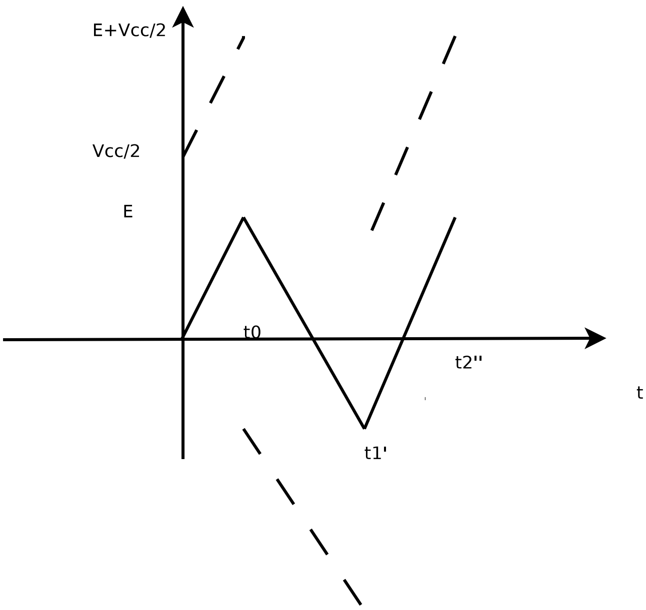

Figura 3: grafica de v_c (continua) y de v_{o2} punteada