Notas Sobre Estabilidad BIBO y Estabilidad Interna en Ciertas Clases de Sistemas

Sobre Estabilidad BIBO

Comencemos definiendo ciertas clases de funciones necesarias para nuestro estudio. Definamos $\mathcal{L}_\infty$ en la siguiente forma.

$$\mathcal{L}_\infty = \{f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \text{medibles}\ :\ \exists k > 0\,,\ |f(t)| \leq k \text{ p.c.t. } t \in [0,+\infty)\}\,.$$

Es fácil de ver que $\mathcal{L}_\infty$ es un espacio vectorial real. Introducimos la función $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}_\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess.sup}_{t\geq 0} |f(t)|\ .$$

Citemos el siguiente resultado importante.

Proposición 1. $\big(\mathcal{L}_\infty, \|\cdot\|_\infty\big)$ *es un espacio vectorial (real) normado. Además, también es completo.*

Definimos similarmente ahora $\mathcal{L}_1$ como

$$\mathcal{L}_1 = \{f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \text{medibles}\ :\ \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt\ < +\infty\}\,.$$

La función $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es definida como

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt\ .$$

Análogamente tenemos aquí el siguiente resultado.

Proposición 2. $\big(\mathcal{L}_1, \|\cdot\|_1\big)$ *es un espacio vectorial (real) normado. Además, también es completo.*

Para $T \geq 0$ y $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dados, denotaremos con f_T a la función definida por

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & ,\ t \in [0,T] \\ 0 & ,\ t > T \end{cases}\ .$$

Vamos a definir los conjuntos de funciones $\mathcal{L}_{\infty,e}$ y $\mathcal{L}_{1,e}$ (los cuales también son espacios vectoriales reales) como

$$\mathcal{L}_{\infty,e} = \{f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \text{medibles}\ :\ f_T \in \mathcal{L}_\infty\,,\ \forall T > 0\}\ ,$$

$$\mathcal{L}_{1,e} = \{f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \text{medibles}\ :\ f_T \in \mathcal{L}_1\,,\ \forall T > 0\}\ .$$

Obviamente tenemos que $\mathcal{L}_\infty \subset \mathcal{L}_{\infty,e}$, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{1,e}$, y $\mathcal{L}_{\infty,e} \subset \mathcal{L}_{1,e}$.

En este estudio, $\mathcal{L}_{\infty,e}$ será el espacio de funciones o señales que usaremos para excitar (o como entrada para) los sistemas considerados. Y $\mathcal{L}_{1,e}$ será, en la primera parte de nuestro estudio, el espacio de funciones respuestas al impulso de los sistemas que serán objeto de nuestro análisis.

Supongamos dada una función $h \in \mathcal{L}_{1,e}$. Es fácil de verificar que para cada $u \in \mathcal{L}_{\infty,e}$, la función y definida como

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau\ ,\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

es un miembro de $\mathcal{L}_{\infty,e}$. En efecto, dado $T > 0$ se verifica que

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(t-\tau)|\|u_T\|_\infty\,d\tau \leq \|h_T\|_1\|u_T\|_\infty\ ,\ t \in [0, T]\,.$$

Así, dada una función $h \in \mathcal{L}_{1,e}$, el sistema (o transformación) lineal (e invariante en el tiempo) S definido por

$$S(u) = h * u\ ,\ u \in \mathcal{L}_{\infty,e} \tag{2}$$

asigna a cada excitación (o entrada) $u \in \mathcal{L}_{\infty,e}$, una respuesta (o salida) $y = (h * u) \in \mathcal{L}_{\infty,e}$. Es decir $S : \mathcal{L}_{\infty,e} \longrightarrow \mathcal{L}_{\infty,e}$.

Definición 1. *Sea dada una función $h \in \mathcal{L}_{1,e}$. Decimos que un sistema S descripto a través de la transformación (2) es <u>BIBO estable</u> cuando se verifica lo siguiente:*

(i) $S : \mathcal{L}_\infty \longrightarrow \mathcal{L}_\infty$, *y*

(ii) $\exists k > 0\ :\ \|S(u)\|_\infty \leq k\|u\|_\infty\,,\ \forall u \in \mathcal{L}_\infty$.

Ejemplo 1. Sean S_i, $i \in \{1,2\}$, sistemas lineales (e invariantes en el tiempo) representados por sus respuestas al impulso $h_i \in \mathcal{L}_{1,e}$, $i \in \{1,2\}$. Consideremos el sistema lineal (e invariante en el tiempo) S definido de la siguiente manera:

$$S(u) = S_2(S_1(u)) \ , \ u \in \mathcal{L}_{\infty,e} \ .$$

Es fácil de verificar, usando la definición anterior (y se deja como ejercicio), que si los sistemas S_1 y S_2 son BIBO estables, entonces el sistema S (formado por la cascada de S_2 y S_1) también es BIBO estable.

Ejemplo 2. Sean S_i, $i \in \{1,2\}$, sistemas lineales (e invariantes en el tiempo) representados por sus respuestas al impulso $h_i \in \mathcal{L}_{1,e}$, $i \in \{1,2\}$. Consideremos el sistema lineal (e invariante en el tiempo) S definido de la siguiente manera:

$$S(u) = (S_2(u)) + (S_1(u)) \ , \ u \in \mathcal{L}_{\infty,e} \ .$$

Es fácil de verificar, usando la definición anterior (y se deja como ejercicio), que si los sistemas S_1 y S_2 son BIBO estables, entonces el sistema S (conformado por el paralelo de S_2 con S_1) también es BIBO estable.

Ejemplo 3. Sea S un sistema lineal representado por su respuesta al impulso $h \in \mathcal{L}_{1,e}$, donde $h(t) = 1\,,\ t \geq 0$. ¿Es acaso S BIBO estable?
Notemos que $S(u)(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau\,,\ t \geq 0$. Así, eligiendo la señal $u \in \mathcal{L}_\infty$, con $u(t) = 1\,,\ t \geq 0$, obtenemos que $S(u)(t) = t\,,\ t \geq 0$. Tenemos entonces que $(S(u) \in \mathcal{L}_{\infty,e}$, pero) $S(u) \notin \mathcal{L}_\infty$, lo cual prueba que S no es BIBO estable.

Teorema 1. *Sea dada una función $h \in \mathcal{L}_{1,e}$. Entonces, el sistema S descripto a través de la transformación (2) es BIBO estable si y solo si $h \in \mathcal{L}_1$. Adicionalmente, en caso que S es BIBO estable se verifica que*

$$\|S(u)\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty \,,\ \forall u \in \mathcal{L}_\infty \ .$$

Demostración: $(\Longrightarrow)$ Por hipótesis $h \in \mathcal{L}_1$, y tenemos que

$$y(t) = S(u)(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Dada $u \in \mathcal{L}_\infty$, se verifica que

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(t-\tau)|\,|u(t)|\,d\tau \leq \|u\|_\infty \int_0^t |h(\tau)|\,d\tau \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \,,$$

lo cual implica que $y \in \mathcal{L}_\infty$; y que también se cumple

$$\|S(u)\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty \,,\ \forall u \in \mathcal{L}_\infty \ .$$

($\Longleftarrow$) Asumamos $h \in \mathcal{L}_{1,e}$, pero $h \notin \mathcal{L}_1$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $T_n > 0$ tal que $\int_0^{T_n} |h(\tau)| d\tau \geq n$. Podemos entonces definir una sucesión de funciones $\{u_n\} \subset \mathcal{L}_\infty$ de la siguiente manera:

$$u_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\{h(T_n - t)\} & ,\ t \in [0, T_n] \\ 0 & ,\ t > T_n \end{cases} ,$$

para la que se cumple $\|u_n\|_\infty = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión de funciones también cumple que

$$S(u_n)(T_n) = \int_0^{T_n} |h(T_n - \tau)| \, d\tau = \int_0^{T_n} |h(\theta)| \, d\theta \geq n \ ,$$

lo cual implica que $\|\{S(u_n)\}_{T_n}\|_\infty \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, no puede existir $k > 0$ tal que cumpla $\|S(u_n)\|_\infty \leq k$; y así S no es BIBO estable.

$\square$

El siguiente resultado es consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 1. *Supongamos que el sistema S representado por $h \in \mathcal{L}_{1,e}$ es BIBO estable. Entonces, la función h es Laplace transformable, y la region de convergencia de la transformada de Laplace de h incluye $\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} \geq 0\}$. Además, se verifica que (donde a continuación usamos $H = \mathcal{L}\{h\}$):*

(i) $|H(s)| \leq \|h\|_1$, $\forall s \in \mathbb{C}^+$.

(ii) H *es analítica en Int*$\{\mathbb{C}^+\}$.

(iii) $|H(s)| \to 0$, $|s| \to +\infty$, $s \in \mathbb{C}^+$.

Este corolario nos provee con la siguiente caracterización de estabilidad BIBO para el caso en que $H = \mathcal{L}\{h\}$ es una función real-racional.

Corolario 2. *Supongamos que el sistema S esta representado por $h \in \mathcal{L}_{1,e}$. Supongamos que la función h es Laplace transformable, y que $H = \mathcal{L}\{h\}$ es una función real-racional. Entonces, bajo estas condiciones, S es BIBO estable <u>si y solo si</u>*

(i) H es estrictamente propia, y

(ii) H no tiene polos en $\mathbb{C}^+$.

Demostración: ($\Longleftarrow$) Si S es BIBO estable entonces (i) y (ii) siguen directamente de las propiedades (i) y (iii) del corolario anterior.
($\Longrightarrow$) Si (i) y (ii) se verifica, entonces podemos escribir

$$H(s) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{k_{ij}}{(s+s_i)^j} \ ,$$

donde $\Re\{s_i\} > 0$, $\forall i$. Así,

$$h(t) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{k_{ij}}{(j-1)!} \, t^{(j-1)} \, e^{-s_i t} \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Entonces,

$$|h(t)| \leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{|k_{ij}|}{(j-1)!} \, t^{(j-1)} \, e^{-\Re\{s_i\} t} \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

lo cual implica que $h \in \mathcal{L}_1$, y en virtud del teorema anterior S es BIBO estable.

$\square$

Como aplicación de esta caracterización presentada, el siguiente resultado provee con una condición suficiente de estabilidad BIBO para una clase importante de sistemas.

Corolario 3. *Consideremos un sistema descripto por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, son dadas. Entonces, una condición suficiente para que este sistema, con $x_0 = 0$, sea BIBO estable es que la matriz A no tenga valores propios en $\mathbb{C}^+$.

Demostración: Sabemos que

$$H(s) = \mathcal{L}\{h\}(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C\mathrm{Adj}\{(sI - A)\}B}{\det{(sI - A)}}$$

la cual es una función real-racional estrictamente propia, y por hipótesis además no tiene polos en $\mathbb{C}^+$. Así, invocando el corolario anterior tenemos que el sistema es BIBO estable.

□

Vamos a proceder ahora a extender la clase de sistemas bajo consideración, a través del uso de respuestas al impulso h (las cuales hasta el momento eran miembros de $\mathcal{L}_{1,e}$) que ahora podrán ser miembros de un subconjunto de distribuciones en $\mathcal{D}'_+$.

Definición 2. *Llamamos $\mathbb{A}$ a el conjunto de funciones generalizadas $f \in \mathcal{D}'_+$ tal que*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \delta(t - t_i) \; + \; f_\alpha(t) \ ,$$

donde las sucesiones $\{t_i\} \subset \mathbb{R}^+$ y $\{f_i\} \subset \mathbb{R}$ satisfacen

$$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots \ , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| \; < +\infty \ ,$$

y además, $f_\alpha \in \mathcal{L}_1$.
A cada $f \in \mathbb{A}$ le asociamos un escalar $\|f\|_{\mathbb{A}}$ definido de la siguiente manera:

$$\|f\|_{\mathbb{A}} = \sum_{i=0}^{+\infty} |f_i| + \int_0^{+\infty} |f_\alpha(t)| \, dt \ .$$

Notemos que $\mathcal{L}_1 \subset \mathbb{A}$; y además, si $f \in \mathcal{L}_1$ se verifica que $\|f\|_{\mathbb{A}} = \|f\|_1$.

Ejemplo 4. (i) La distribución

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^2} \delta(t - iT) \ ,$$

donde $T > 0$ es dado, es un miembro de $\mathbb{A}$.

(ii) Note que sin embargo f, con

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)} \delta(t - iT) \ ,$$

donde $T > 0$ es dado, no pertenece a $\mathbb{A}$.

(iii) Para f definido por $f(t) = \delta(t) + Y(t)\, e^{-t}$, se cumple que $f \in \mathbb{A}$. Es útil notar también que $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = 1 + \frac{1}{(s+1)}$ es una función real-racional y propia.

En el siguiente resultado sumarizamos propiedades importantes concernientes con $\mathbb{A}$. Algunas de ellas se verifican mas generalmente para miembros de $\mathcal{D}'_+$, y ya las hemos estudiado en nuestro curso previo.

Proposición 3. $\big(\mathbb{A}, \|\cdot\|_{\mathbb{A}}\big)$ *es un espacio vectorial (real) normado. Además, también es completo. También tenemos que:*

(i) Si $f, g \in \mathbb{A}$, entonces $(f * g) \in \mathbb{A}$, donde

$$(f*g)(t) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f_i g_j \delta(t-t_i-t_j) + \sum_{i=0}^{+\infty} f_i g_\alpha(t-t_i) + \sum_{j=0}^{+\infty} g_j f_\alpha(t-t_j) + \int_0^t f_\alpha(t-\tau) g_\alpha(\tau)\, d\tau \ ,$$

y se cumple que

$$\|(f*g)\|_{\mathbb{A}} \leq \|f\|_{\mathbb{A}} \|g\|_{\mathbb{A}} \ .$$

(ii) Si $f, g, h \in \mathbb{A}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} &(f * g) = (g * f) \ , \\ &(f * (\lambda g)) = \lambda (f * g) \ , \\ &(f * (g + h)) = (f * g) + (f * h) \ . \end{aligned}$$

(iii) Si $f, g \in \mathbb{A}$, y se cumple que $(f * g) = 0$, entonces, $f = 0$ o $g = 0$.

Notemos que, como consecuencia directa de esto, tenemos que si $f \in \mathbb{A}$ y $g \in \mathcal{L}_1$, entonces, $(f * g) \in \mathcal{L}_1$. Directamente de la definición de $\mathbb{A}$ también obtenemos lo siguiente.

Proposición 4. *Si $f \in \mathbb{A}$, entonces, $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i e^{-st_i}$ y $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)e^{-st}\,dt$ convergen uniformemente en $\mathbb{C}^+$. Así, definen una función continua $F : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ a través de*

$$F(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i e^{-st_i} \; + \int_0^{+\infty} f_\alpha(t)e^{-st}\,dt \ , \ s \in \mathbb{C}^+$$

la cual es analítica en $Int\{\mathbb{C}^+\}$, y verifica que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) \ , \ s \in Int\{\mathbb{C}^+\} \ .$$

Además, se cumple que

$$|F(s)| \leq \|f\|_{\mathbb{A}} \ , \ s \in \mathbb{C}^+ \ .$$

Es conveniente definir el siguiente conjunto de funciones complejas.

Definición 3. *Definimos el conjunto de funciones $\widehat{\mathbb{A}}$ de la siguiente manera. Una función $F : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ está en $\widehat{\mathbb{A}}$, si y solo si, $F = \mathcal{L}\{f\}$ para algún $f \in \mathbb{A}$.*

Veamos ahora que las funciones $F \in \widehat{\mathbb{A}}$, que son reales-racionales, son fácil de caracterizar.

Teorema 2. *Sea F una función real-racional. Entonces, $F \in \widehat{\mathbb{A}}$, si y solo si*

(i) F es propia, y

(ii) F no tiene polos en $\mathbb{C}^+$.

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si F cumple (i) y (ii), entonces, podemos escribir

$$F(s) = f_0 + F_\alpha(s) \ ,$$

donde $f_0 \in \mathbb{R}$ y F_α es estrictamente propia y no tiene polos en $\mathbb{C}^+$. Así, en virtud de Corolario 2, $F_\alpha = \mathcal{L}\{f_\alpha\}$ con $f_\alpha \in \mathcal{L}_1$. Y esto implica que $f(t) = f_0\delta(t) + f_\alpha(t)$, satisface $f \in \mathbb{A}$ y $F = \mathcal{L}\{f\}$.
($\Longleftarrow$) Si $F \in \widehat{\mathbb{A}}$, entonces, en virtud de la Proposition anterior

$$|F(s)| \leq \|f\|_{\mathbb{A}} \ , \ s \in \mathbb{C}^+ \ .$$

Sigue de aquí que las condiciones (i) y (ii) se deben cumplir.

$\square$

Luego de haber definido el conjunto $\mathbb{A} \subset \mathcal{D}'_+$, definamos ahora se extensión $\mathbb{A}_e \subset \mathcal{D}'_+$ de manera análoga a como hemos definido $\mathcal{L}_{\infty,e}$ y $\mathcal{L}_{1,e}$.

Definición 4. *Llamamos $\mathbb{A}_e$ a el conjunto de funciones generalizadas $f \in \mathcal{D}'_+$ tal que*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i \delta(t - t_i) \, + \, f_\alpha(t) \ ,$$

donde, $f_\alpha \in \mathcal{L}_{1,e}$, $\{t_i\} \subset \mathbb{R}^+$ satisface

$$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots \ ,$$

y además, las sucesiones $\{t_i\} \subset \mathbb{R}^+$ y $\{f_i\} \subset \mathbb{R}$ satisfacen la siguiente propiedad

$$\sum_{i \,:\, t_i < T} |f_i| \, < +\infty \ , \ \forall T > 0 \ .$$

Si para $T > 0$ y $f \in \mathcal{D}'_+$ dados, entendemos $f_T \in \mathcal{D}'_+$ como

$$\langle f_T, \varphi \rangle = \begin{cases} \langle f, \varphi \rangle & , \ \varphi \in \mathcal{D} : \mathrm{sop}\{\varphi\} \subset (-\infty, T] \\ 0 & , \ \varphi \in \mathcal{D} : \mathrm{sop}\{\varphi\} \subset [T, +\infty) \end{cases} ,$$

entonces, podemos expresar la definición de arriba mas compactamente como

$$\mathbb{A}_e = \{ f \in \mathcal{D}'_+ \ : \ f_T \in \mathbb{A} \, , \, \forall T > 0 \} \ .$$

Ejemplo 5. (i) La distribución f, con

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)} \delta(t - iT_0) \ ,$$

donde $T_0 > 0$ es dado, que como vimos, $f \notin \mathbb{A}$, cumple $f \in \mathbb{A}_e$.

(ii) También, f definido como

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(t - iT_0) \ ,$$

donde $T_0 > 0$ es dado, cumple que $f \notin \mathbb{A}$, pero $f \in \mathbb{A}_e$.

(iii) Para f definido por $f(t) = \delta(t) + Y(t)(e^t + te^{2t})$, se cumple que $f \in \mathbb{A}_e$. Note también que $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = 1 + \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-2)^2}$ es una función real-racional y propia.

(iv) Note mas generalmente que si $f \in \mathcal{L}_{1,e}$, entonces $f \in \mathbb{A}_e$. Así, $\mathcal{L}_{1,e} \subset \mathbb{A}_e$.

Estamos ahora en condiciones de extender la clase de sistemas bajo consideración. Supongamos dada una distribución $h \in \mathbb{A}_e$. Vamos a verificar que para cada $u \in \mathcal{L}_{\infty,e}$, la función y definida como [1]

$$y(t) = (h * u)(t) = \sum_{i\,:\,t_i<t} h_i u(t - t_i) \; + \int_0^t h_\alpha(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \;,\; t \in \mathbb{R}^+ \tag{3}$$

es un miembro de $\mathcal{L}_{\infty,e}$. En efecto, dado $T > 0$ se verifica que

$$|y(t)| \leq \sum_{i\,:\,t_i<t} |h_i|\|u_T\|_\infty \; + \int_0^t |h_\alpha(t-\tau)|\|u_T\|_\infty\,d\tau \leq$$
$$\Big(\sum_{i\,:\,t_i<T} |h_i| \; + \; \|(h_\alpha)_T\|_1\Big)\|u_T\|_\infty \;,\; t \in [0, T]\,.$$

Así, dada una distribución $h \in \mathbb{A}_e$, el sistema (o transformación) lineal (e invariante en el tiempo) S definido por

$$S(u) = (h * u) \;,\; u \in \mathcal{L}_{\infty,e} \tag{4}$$

asigna a cada excitación (o entrada) $u \in \mathcal{L}_{\infty,e}$, una respuesta (o salida) $y = (h * u) \in \mathcal{L}_{\infty,e}$. Es decir $S : \mathcal{L}_{\infty,e} \longrightarrow \mathcal{L}_{\infty,e}$.

Es importante mencionar aquí que esta clase de sistemas que ahora estamos considerando (la cual es una extension de la clase de sistemas previamente considerados), constituye una clase de sistemas lineales e invariantes en el tiempo suficientemente general. La mayoría de los sistemas físicos (lineales e invariantes en el tiempo) poseen respuestas al impulso $h \in \mathbb{A}_e$.
Volvamos ahora al tema que nos ocupa, es decir el estudio de la estabilidad BIBO de los sistemas bajo consideración. Mencionemos que la definición, de

[1] Para $h \in \mathbb{A}_e$ y $u \in \mathcal{L}_{\infty,e}$ dados, hacemos aquí abuso de notación cuando usamos $(h*u)$ para denotar, en realidad, a la función asociada a la distribución $(h * \mathcal{T}_u)$.

estabilidad BIBO, es la misma que anteriormente. Es decir, en Definición 1, ahora debe leerse $h \in \mathbb{A}_e$. Mencionemos también que lo discutido en los Ejemplos 1 y 2 continua siendo valido para la clase ampliada de sistemas que estamos considerando ahora (es decir, en ellos ahora debe leerse $h_1, h_2 \in \mathbb{A}_e$). Como es posible imaginar, la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO que presentamos seguidamente es análoga a la presentada en Teorema 1 (donde, en aquel caso, $h \in \mathcal{L}_{1,e}$).

Teorema 3. *Sea dada una distribución $h \in \mathbb{A}_e$. Entonces, el sistema S descripto a través de la transformación (4) es BIBO estable si y solo si $h \in \mathbb{A}$. Adicionalmente, en caso que S es BIBO estable se verifica que*

$$\|S(u)\|_\infty \leq \|h\|_{\mathbb{A}} \|u\|_\infty \, , \; \forall u \in \mathcal{L}_\infty \; .$$

Demostración: ($\Longrightarrow$) Por hipótesis $h \in \mathbb{A}$, y tenemos que

$$y(t) = S(u)(t) = \sum_{i\,:\,t_i<t} h_i u(t-t_i) \; + \int_0^t h_\alpha(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \; , \; t \in \mathbb{R}^+ \; .$$

Dada $u \in \mathcal{L}_\infty$, se verifica que

$$|y(t)| \leq \sum_{i\,:\,t_i<t} |h_i| \|u\|_\infty \; + \int_0^t |h_\alpha(t-\tau)| \|u\|_\infty \, d\tau \leq$$
$$\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} |h_i| \; + \; \|h_\alpha\|_1 \Big) \|u\|_\infty = \|h\|_{\mathbb{A}} \|u\|_\infty \; , \; t \in \mathbb{R}^+ \, ,$$

lo cual implica que $y \in \mathcal{L}_\infty$; y que también se cumple

$$\|S(u)\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty \, , \; \forall u \in \mathcal{L}_\infty \; .$$

($\Longleftarrow$) Asumamos $h \in \mathbb{A}_e$, pero $h \notin \mathbb{A}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, siempre podemos construir $u_n \in \mathcal{L}_\infty$, de soporte acotado y con $\|u_n\|_\infty = 1$, y también $T_n > 0$, tal que se cumpla $S(u_n)(T_n) \geq n$ (y también $S(u_n)(t) \geq n$, $\forall t \in [T_n - \epsilon_n, T_n]$, para algún $\epsilon_n > 0$). Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ dado, tendremos que $\|\{S(u_n)\}_{T_n}\|_\infty \geq n$, lo cual implica que el sistema S no es BIBO estable; dado que no puede existir $k > 0$ tal que cumpla $\|S(u_n)\|_\infty \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
A los efectos de la construcción de la sucesión de entradas $\{u_n\} \subset \mathcal{L}_\infty$, arriba mencionada, consideremos los dos casos posibles:

(i) $h_\alpha \in \mathcal{L}_{1,e}$, pero $h_\alpha \notin \mathcal{L}_1$.

(ii) $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} |h_i| = +\infty$.

Se deja al lector el ejercicio de completar los detalles de esta construcción para cada uno de los casos.

□

La siguiente conclusion es una consecuencia directa de este Teorema 3 y de Teorema 2.

Corolario 4. *Supongamos que el sistema S esta representado por $h \in \mathbb{A}_e$. Supongamos que la distribución h es Laplace transformable, y que $H = \mathcal{L}\{h\}$ es una función real-racional. Entonces, bajo estas condiciones, S es BIBO estable si y solo si*

(i) H es propia, y

(ii) H no tiene polos en $\mathbb{C}^+$.

En un sentido, que quedara claro inmediatamente, este resultado puede ser generalizado para distribuciones $h \in \mathcal{D}'_+$.

Proposición 5. *Sea dada $h \in \mathcal{D}'_+$. Supongamos que la distribución h es Laplace transformable, y que $H = \mathcal{L}\{h\}$ es una función real-racional. Entonces, bajo estas hipótesis, se verifica que*

$$(h * u) \in \mathcal{L}_\infty \ , \ \forall u \in \mathcal{L}_\infty$$

si y solo si se cumple que

(i) H es propia, y

(ii) H no tiene polos en $\mathbb{C}^+$.

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si (i) y (ii) se cumplen, entonces, en virtud de Teorema 2, $H \in \widehat{\mathbb{A}}$. Lo cual implica que $h \in \mathbb{A}$. Así, invocando Teorema 3, sigue que

$$(h * u) \in \mathcal{L}_\infty \ , \ \forall u \in \mathcal{L}_\infty \ .$$

($\Longleftarrow$) Consideremos $u_0(t) = Y(t)\, e^{-t}$ ($\Rightarrow$ $U_0(s) = \frac{1}{(s+1)}$). Como $u_0 \in \mathcal{L}_\infty$, por hipótesis, $(h * u_0) \in \mathcal{L}_\infty$.

Probaremos que H es propia. Si H no fuera propia, entonces existen dos alternativas

$$\lim_{|s|\to+\infty} |H(s)\, U_0(s)| = k \neq 0 \ , \ \text{o} \qquad \lim_{|s|\to+\infty} |H(s)\, U_0(s)| = +\infty \ .$$

Por hipótesis, sabemos que

$$H(s)\, U_0(s) = \mathcal{L}\{(h * u_0)\}(s) = \int_0^{+\infty} (h * u_0)(t)\, e^{-st}\, dt \ , \ s \in \mathrm{Int}\{\mathbb{C}^+\} \ .$$

Entonces,

$$|H(s)\, U_0(s)| \leq \|(h{*}u_0)\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-\Re\{s\}t}\, dt = \|(h{*}u_0)\|_\infty \frac{1}{\Re\{s\}} \ , \ s \in \mathrm{Int}\{\mathbb{C}^+\} \ . \tag{5}$$

Ahora, si usamos $s = \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda > 0$, en (5), obtenemos que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} |H(\lambda)\, U_0(\lambda)| = 0 \ .$$

Lo cual es una contradicción. Así, H debe ser propia.
Demostraremos ahora que H no tiene polos en $\mathbb{C}^+$. En efecto, notemos que sigue directamente de (5) que H no tiene polos en $\mathrm{Int}\{\mathbb{C}^+\}$. Probaremos por contradicción que H tampoco tiene polos sobre el eje imaginario. Supongamos H tuviera un polo en $s_0 = j\omega_0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$. Elijamos $u_1(t) = Y(t)\cos(\omega_0 t)$ ($\Rightarrow\ U_1(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s-j\omega_0)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+j\omega_0)}$). Como $u_1 \in \mathcal{L}_\infty$, por hipótesis, $(h{*}u_1) \in \mathcal{L}_\infty$. Entonces, tenemos que

$$H(s)\, U_1(s) = \mathcal{L}\{(h * u_1)\}(s) = \int_0^{+\infty} (h * u_1)(t)\, e^{-st}\, dt \ , \ s \in \mathrm{Int}\{\mathbb{C}^+\} \ .$$

Usando $s = \lambda + j\omega_0$, $\lambda > 0$, en la ecuación anterior, podemos concluir que

$$|H(s)\, U_1(s)|\big|_{s=\lambda+j\omega_0} \leq \|(h * u_1)\|_\infty \frac{1}{\lambda} \ , \ \lambda > 0 \ .$$

Pero la existencia de un polo de H en $s_0 = j\omega_0$ implica que

$$|H(s)\, U_1(s)|\big|_{s=\lambda+j\omega_0} \sim \frac{k}{\lambda^p} \ , \ \text{para } \lambda \to 0^+ \ ,$$

para algún $k > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 2$. Lo cual es, en virtud de la desigualdad de arriba, una contradicción.
Hemos así probado que la función H satisface las condiciones (i) y (ii).

$\square$

Sobre Estabilidad Interna

En esta sección concentraremos nuestra atención en sistemas descriptos a través de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D \in \mathbb{R}$ son dadas.

Definición 5 (Estabilidad Interna). *Vamos a decir que el sistema arriba considerado es internamente estable, cuando las soluciones $\phi(\cdot; x_0)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+$$

satisfacen la siguiente propiedad:

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t; x_0) = 0 \ , \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \ .$$

Tenemos la siguiente condición necesaria y suficiente de estabilidad interna.

Teorema 4. *El sistema bajo consideración es internamente estable, si y solo si, la matriz A es tal que no tiene valores propios en $\mathbb{C}^+$ (o, equivalentemente, todos los valores propios de A tienen parte real negativa).*

Demostración: Solo con el fin de simplificar la demostración, vamos a suponer aquí que matriz A es diagonalizable. Es decir, vamos a suponer que existe $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, no-singular, tal que $\Lambda = T^{-1}AT$ es diagonal:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \ .$$

Usando el cambio de variable, $x(t) = Tz(t)$, podemos transformar la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \ , \ x(0) = x_0 \ , \ t \in \mathbb{R}^+$$

en la siguiente ecuación diferencial equivalente:

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) \ , \ z(0) = z_0 = T^{-1}x_0 \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Así, tenemos que

$$\phi(t;x_0) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}(t)\,x_0 = T\mathcal{L}^{-1}\{(sI-\Lambda)^{-1}\}(t)\,T^{-1}x_0 \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Dado que

$$(sI-\Lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(s-\lambda_n)} \end{pmatrix} \ ,$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI-\Lambda)^{-1}\}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Sigue asi, de las expresiones anteriores, que se verifica

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t;x_0) = 0 \ , \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \ ,$$

si y solo si

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{L}^{-1}\{(sI-\Lambda)^{-1}\}(t) = 0 \ ,$$

si y solo si

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_i t} = 0 \ , \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \ ,$$

si y solo si

$$\Re\{\lambda_i\} < 0 \ , \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \ .$$

□

El siguiente resultado es ahora una consecuencia directa de lo previamente estudiado.

Corolario 5. *Asumamos que el sistema dinámico descripto por*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\ ,\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D \in \mathbb{R}$ *son dadas, es internamente estable. Entonces, bajo esta hipótesis, el sistema mencionado, con* $x_0 = 0$, *es BIBO estable.*
Además, la respuesta total, del sistema dinámico bajo consideración, esta dada por

$$y(t) = C\,\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}(t)\,x_0\ +\ (h * u)(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}^+$$

donde, para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *se cumple que*

$$\lim_{t\to+\infty} C\,\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}(t)\,x_0 = 0\ ,$$

y donde

$$h = \mathcal{L}^{-1}\{D + C(sI - A)^{-1}B\} \in \mathbb{A}\ .$$

Ilustremos este resultado con un ejemplo.

Ejemplo 6. Consideremos el circuito RLC serie, mostrado en la figura, el cual es excitado por una fuente de tension $u(t)$ y donde tomamos como salida la tension en el capacitor, es decir $y(t) = v(t)$. Asumimos que $R > 0$, $L > 0$, $C > 0$, y son dados. Así, tenemos que

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v(t)\ ,\quad i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}\ .$$

Entonces, el comportamiento dinámico de este circuito es descripto por

$$\begin{aligned}\dot{\begin{pmatrix} i(t)\\ v(t)\end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i(t)\\ v(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}u(t)\ ,\ \begin{pmatrix} i(0)\\ v(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_0\\ v_0\end{pmatrix}\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i(t)\\ v(t)\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Aquí entonces tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{pmatrix}\ ,\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}\ ,\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix}\ ,\ D = 0\ .$$

La pregunta que ahora nos planteamos es si acaso el sistema dinámico bajo consideración es o no internamente estable. La respuesta es inmediata. El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(s) = \det\{(sI - A)\} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

cuyas raíces tienen parte real negativa. Nuestro sistema es por tanto internamente estable y satisface la hipótesis de Corolario 5. La respuesta total del sistema dinámico esta dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{(\frac{1}{C}i_0 + (s + \frac{R}{L})v_0)}{(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}\Big\}(t) + (h * u)(t) \ , \ t \in \mathbb{R}^+$$

donde para cualquier i_0 , $v_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{(\frac{1}{C}i_0 + (s + \frac{R}{L})v_0)}{(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}\Big\}(t) = 0 \ ,$$

y donde (debido a que aquí $D = 0$)

$$h = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\frac{1}{LC}}{(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}\Big\} \in \mathcal{L}_1 \subset \mathbb{A} \ .$$

Luego de Corolario 5 en donde se establece que la estabilidad interna del sistema dinámico bajo consideración es condición suficiente para la estabilidad BIBO del sistema con $x_0 = 0$, surge la siguiente pregunta: ¿Acaso el recíproco de dicho resultado es cierto? Como el siguiente ejemplo ilustra, tal resultado recíproco no es, en general, cierto.

Ejemplo 7. Consideremos el sistema dinámico descripto por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = 0 \ .$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(s) = \det\{(sI - A)\} = (s+1)^2(s-1) \ ,$$

el cual tiene una raíz en $s = 1$. Sigue entonces del Teorema 4 que el sistema dinámico no es internamente estable. Sin embargo, calculando la función de trasferencia $H = \mathcal{L}\{h\}$ obtenemos que

$$H(s) = \mathcal{L}\{h\}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)}{(s+1)^2} \ ,$$

y en virtud de Corolario 4 concluimos que el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es BIBO estable.

Lo que ocurre en el ejemplo anterior es que los polinomios $C\mathrm{Adj}\{(sI - A)\}B$ y $\det\{(sI - A)\}$ no son coprimos; es decir, poseen raíces en común. En este caso, ambos polinomios poseen el factor $(s - 1)$, en común, el cual es cancelado en la conformación de

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{C\mathrm{Adj}\{(sI - A)\}B}{\det\{(sI - A)\}} \ .$$

Así, el factor $(s - 1)$, el cual aparece en el polinomio característico P_A, no aparece en el polinomio denominador de la función de transferencia H. Establecer condiciones técnicas débiles, bajo las cuales estabilidad BIBO si implica estabilidad interna, nos llevaría fuera del dominio de este curso. (El curso 'Introducción a la Teoría Algebraica de Sistemas Lineales' ofrece respuestas a este y a varios otros tópicos interesantes que pertenecen a la teoría de sistemas lineales.) Sin embargo, basados en la observación anterior estamos preparados para aseverar lo siguiente.

Proposición 6. *Considere el sistema dinámico descripto por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D \in \mathbb{R}$ *son dadas. Asumamos que la función de transferencia correspondiente,* $H = \mathcal{L}\{h\}$, *se puede expresar como*

$$H(s) = \frac{P_{Num,m}(s)}{P_{Denom,n}(s)}$$

donde los polinomios $P_{Num,m}$ y $P_{Denom,n}$, de grados m y n respectivamente, $m \leq n$, son coprimos.
Bajo estas condiciones, si el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es BIBO estable, entonces, el sistema dinámico arriba mencionado es internamente estable.

Basado en los resultados hasta ahora estudiados podemos concluir el siguiente resultado cuya verificación dejamos al lector.

Corolario 6. *Considere el sistema dinámico descripto por*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ &y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix} \ .$$

Asumamos que los polinomios (en la variable s) $(b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)$ y $(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)$, son coprimos.
Entonces, bajo estas condiciones, el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$, es BIBO estable, si y solo si, el sistema dinámico arriba mencionado es internamente estable.

Es apropiado recordar aquí que un sistema dinámico descripto a través de

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \ , \\ &y(0) = x_{0,1} \ , \ y^{(1)}(0) = x_{0,2} \ , \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(0) = x_{0,n} \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

puede ser equivalentemente descripto por

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ &y(t) = Cx(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

y donde

$$x_0^* = \begin{pmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} & \dots & x_{0,n} \end{pmatrix} \ .$$

Así, para este caso particular, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 7. *El sistema dinámico descripto a través de*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ &y(t) = Cx(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$*, y* $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$*, están dados por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

es internamente estable, <u>si y solo si</u>, el sistema bajo consideración, con $x_0 = 0$*, es BIBO estable.*

Sobre Funciones Reales-Racionales y Propias

Hemos visto que dado un sistema dinámico descripto por

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R}^+ \\ &y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, y $D \in \mathbb{R}$ son dadas, dicho sistema tiene una función de transferencia, $H = \mathcal{L}\{h\}$, que puede ser expresada como

$$H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B = D + \frac{C\mathrm{Adj}\{(sI-A)\}B}{\det\{(sI-A)\}} \ .$$

Dicha función de transferencia es por tanto una función real-racional y propia.

Hemos también visto aquí, que dada cualquier función real-racional y propia, H, siempre podemos encontrar un sistema con descripción como la de arriba cuya función de transferencia sea exactamente H. En efecto, si H es una función real-racional y propia siempre la podemos escribir como

$$H(s) = d + \frac{(b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)}{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)}$$

donde todos los coeficientes involucrados son reales. Así, el sistema dinámico determinado (o definido) por las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \end{pmatrix}, \; D = d$$

(hemos visto que) posee función de trasferencia $d + \frac{(b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1 s+b_0)}{(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0)}$. Estas observaciones (simples pero) importantes las podemos sumarizar en la siguiente forma.

Proposición 7. *El conjunto de todas las funciones reales-racionales y propias, coincide exactamente, con el conjunto de funciones de transferencia de todos los sistemas dinámicos que son descriptos a través de*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \;,\; x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \;,\; t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

para algún cuádruple (A, B, C, D)*, con* $n \in \mathbb{N}$*,* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$*,* $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$*, y* $D \in \mathbb{R}$*.*

La razón de ser de la presente discusión, dentro del tema que aquí estamos tratando, es la de explicar el alcance de estudios y discusiones realizados (y que vamos a realizar) en donde confinamos nuestra atención en sistemas lineales invariantes en el tiempo cuyas respuestas al impulso tienen transformadas de Laplace que son reales-racionales y propias.

Sobre Estabilidad BIBO de una Interconexión en Lazo-Cerrado de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

A lo largo de esta sección vamos a considerar que S_1 y S_2 son sistemas lineales e invariantes en el tiempo representados por sus respuestas al impulso $h_1 \in \mathbb{A}_e$ y $h_2 \in \mathbb{A}_e$ respectivamente. Vamos a asumir, que h_1 y h_2 son Laplace transformables, y usaremos la notación $H_1 = \mathcal{L}\{h_1\}$, $H_2 = \mathcal{L}\{h_2\}$.

Aquí, vamos a considerar la siguiente interconexión conformada por los sistemas S_1 y S_2, la cual esta definida por

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - y_2 \ , \quad y_2 = S_2(e_2) \\ e_2 &= u_2 + y_1 \ , \quad y_1 = S_1(e_1) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} \delta & h_2 \\ -h_1 & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ . \tag{6}$$

Definición 6. *Decimos que la interconexión definida por (6) esta <u>bien definida</u> cuando para cada par* $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_{\infty,e} \times \mathcal{L}_{\infty,e}$ *existe un único par solución* $(e_1, e_2) \in \mathcal{L}_{\infty,e} \times \mathcal{L}_{\infty,e}$*, y adicionalmente esta correspondencia* $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ *es generada por un sistema, lineal e invariante en el tiempo,* S*, representado por su respuesta al impulso*

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \ : \ h_{ij} \in \mathbb{A}_e \ , \forall \, i, j \ .$$

Directamente de esta definición se deriva la siguiente condición equivalente de interconexión bien definida. Los detalles de la demostración se dejan a cargo del lector.

Proposición 8. *La interconexión definida por (6) esta <u>bien definida</u>, <u>si y solo si</u>, existe una distribución* h *tal que*

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \ : \ h_{ij} \in \mathbb{A}_e \ , \forall \, i, j \ ,$$

y tal que

$$\begin{pmatrix} \delta & h_2 \\ -h_1 & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \ . \tag{7}$$

En concordancia con nuestro estudio previo de estabilidad BIBO introducimos ahora la siguiente definición.

Definición 7. *Decimos que la interconexión definida por (6) esta bien definida y es BIBO estable cuando la respuesta al impulso h en Definición 6 satisface adicionalmente que*

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \ : \ h_{ij} \in \mathbb{A} \, , \, \forall \, i, j \ .$$

Tenemos ahora el siguiente resultado.

Teorema 5. *La interconexión definida por (6) esta bien definida y es BIBO estable, si y solo si, se cumple que*

$$\frac{1}{(1+H_1H_2)} \, , \, \frac{H_1}{(1+H_1H_2)} \, , \, \frac{H_2}{(1+H_1H_2)} \in \widehat{\mathbb{A}} \ .$$

Demostración: ($\Longleftarrow$) Por hipótesis la interconexión esta bien definida y es BIBO estable. Por tanto, h, la solución de (7), esta en $\mathbb{A}$ lo cual implica que es Laplace transformable. Podemos entonces escribir que

$$\mathcal{L}\{h\} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{h_{11}\} & \mathcal{L}\{h_{12}\} \\ \mathcal{L}\{h_{21}\} & \mathcal{L}\{h_{22}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \ ,$$

donde $H_{ij} \in \widehat{\mathbb{A}}$, $\forall i, j$. Ahora, usando transformada de Laplace en ecuación (7) obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ -H_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = I \ .$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ -H_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+H_1H_2)} & -\frac{H_2}{(1+H_1H_2)} \\ \frac{H_1}{(1+H_1H_2)} & \frac{1}{(1+H_1H_2)} \end{pmatrix} \ ,$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{(1+H_1H_2)} \, , \, \frac{H_1}{(1+H_1H_2)} \, , \, \frac{H_2}{(1+H_1H_2)} \in \widehat{\mathbb{A}} \ .$$

($\Longrightarrow$) Definamos

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+H_1H_2)} & -\frac{H_2}{(1+H_1H_2)} \\ \frac{H_1}{(1+H_1H_2)} & \frac{1}{(1+H_1H_2)} \end{pmatrix} \in \widehat{\mathbb{A}} \ .$$

Sigue inmediatamente que con esta definición se verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ -H_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = I \ .$$

Lo cual implica que existe $h \in \mathbb{A}$ tal que $\mathcal{L}\{h\} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$, y por tanto resuelve la ecuación (7). Proposición 8 completa la demostración.

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa de Teorema 5 y de Teorema 2.

Corolario 8. *Supongamos que H_1 y H_2 son funciones reales-racionales y propias. Entonces, bajo esta hipótesis, la interconexión considerada en (6) esta bien definida y es BIBO estable, si y solo si, las funciones (reales-racionales)*

$$\frac{1}{(1+H_1H_2)} \, , \ \frac{H_1}{(1+H_1H_2)} \, , \ \frac{H_2}{(1+H_1H_2)}$$

(i) Son propias, y

(ii) No tiene polos en $\mathbb{C}^+$.

A efectos de facilitar el enunciado de ciertos resultados, introduzcamos aquí las siguientes hipótesis:

(H0) *H_1 y H_2 son funciones reales-racionales y propias.*

(H1) *No existen cancelaciones entre ceros y polos, que estén localizados dentro de $\mathbb{C}^+$ (es decir, dentro del semi-plano cerrado derecho), y que ocurran entre H_1 y H_2.*

Corolario 9. *Supongamos que H_1 y H_2 verifican las hipótesis **(H0)** y **(H1)**. Entonces, bajo estas hipótesis, la interconexión considerada en (6) esta bien definida y es BIBO estable, si y solo si, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$|(1 + H_1(s)H_2(s))| \geq \epsilon \ , \ \ \forall s \in \mathbb{C}^+ \ .$$

Demostración: ($\Longrightarrow$) La hipótesis asegura que la función real-racional $\frac{1}{(1+H_1H_2)}$ existe y es propia. Escribamos

$$H_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \ , \ H_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \ ,$$

donde los pares de polinomios (N_i, D_i), $i = 1, 2$, son coprimos. Sigue también, de **(H1)**, que los polinomios N_1N_2 y D_1D_2 son coprimos. Esto, conjuntamente con la hipótesis

$$|(1 + H_1(s)H_2(s))| = \frac{|(D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s))|}{|(D_1(s)D_2(s))|} \geq \epsilon \ , \ \forall s \in \mathbb{C}^+$$

implican que el polinomio $(D_1D_2 + N_1N_2)$ no tiene raíces en $\mathbb{C}^+$.

Entonces, se verifica que $\frac{1}{(1+H_1H_2)} = \frac{D_1D_2}{(D_1D_2+N_1N_2)}$ es propia y no tiene polos en $\mathbb{C}^+$. Sigue de aquí claramente que

$$\frac{1}{(1 + H_1H_2)}H_i = \frac{1}{(D_1D_2 + N_1N_2)}D_jN_i \ , \ i\,, j \ \in \{1, 2\}\,, \, i \neq j$$

también son propias y no tienen polos en $\mathbb{C}^+$. Invocando Corolario 8 se completa esta parte de la demostración.

($\Longleftarrow$) Sigue de Corolario 8 que las funciones reales-racionales

$$\frac{1}{(1 + H_1H_2)} \, , \, \frac{H_1}{(1 + H_1H_2)} \, , \, \frac{H_2}{(1 + H_1H_2)}$$

son propias y no tienen polos en $\mathbb{C}^+$. Esto implica que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{(1 + H_1(s)H_2(s))}\right| = \frac{|(D_1(s)D_2(s))|}{|(D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s))|} \leq \gamma \ , \ \forall s \in \mathbb{C}^+ \ .$$

Entonces,

$$|(1 + H_1(s)H_2(s))| \geq \gamma^{-1} \ , \ \forall s \in \mathbb{C}^+ \ .$$

$\square$

Trabajemos bajo las hipótesis generales **(H0)** y **(H1)**. Es conveniente definir las siguientes funciones, reales-racionales y propias, asociadas con la interconexión en lazo-cerrado (6):

$$L = H_1H_2 \ , \quad F_1 = (1 + H_1H_2) = (1 + L) \ .$$

Observemos que lo que nos dice este ultimo resultado es que la interconexión (6) esta bien definida y es BIBO estable, si y solo si, la función F_1 no contiene ceros en $\mathbb{C}^+$. Así, con el objetivo de obtener un criterio gráfico para poder verificar dicha condición sobre la función F_1 vamos a apelar a un resultado conocido de la teoría de funciones complejas que, a efectos de recordarlo, lo enunciamos seguidamente aplicado a la función F_1.

Teorema (Principio del Argumento Aplicado a F_1). *Sea $\mathcal{C}$ una curva simple cerrada, orientada en <u>sentido horario</u>, tal que no pasa por ningún polo ni cero de F_1, y tal que en el interior de la region del plano complejo delimitada por esta hay exactamente P polos y Z ceros de F_1 (contando multiplicidad). Entonces, bajo estas condiciones, se verifica que*

$$P - Z = \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathcal{C}} \frac{F_1'(s)}{F_1(s)}\, ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{F_1(\mathcal{C})} \frac{1}{z}\, dz = -\mathcal{N} \ ,$$

donde $\mathcal{N}$ es el numero de vueltas de la curva $F_1(\mathcal{C})$ alrededor de el origen en <u>sentido horario</u>.

Nota. Observemos que si le aplicamos a la curva $F_1(\mathcal{C})$ una traslación, determinada por el vector de coordenadas $(-1, 0)$, obtenemos exactamente la curva $L(\mathcal{C})$. Por tanto, se cumple que $\mathcal{N} = N_{(-1)}$, donde

$N_{(-1)}$ – Es el numero de vueltas de la curva $L(\mathcal{C})$ alrededor de el punto $-1 + j0$ en <u>sentido horario</u>.

Observemos, además, que P mencionado en el enunciado del Teorema, también es

P – Es el numero de polos de L dentro del interior de la region del plano complejo delimitada por la curva $\mathcal{C}$.

El criterio de (interconexión bien definida y de) estabilidad de Nyquist es ahora una consecuencia inmediata del Corolario 9, del Principio del Argumento, y de la Nota anterior. Hay solo un detalle adicional que debemos atender; este es, la curva $\mathcal{C}$ (referida en el enunciado del Principio del Argumento) que debemos usar a efectos de establecer este criterio es necesario definirla apropiadamente. Con este fin, vamos a introducir la siguiente definición.

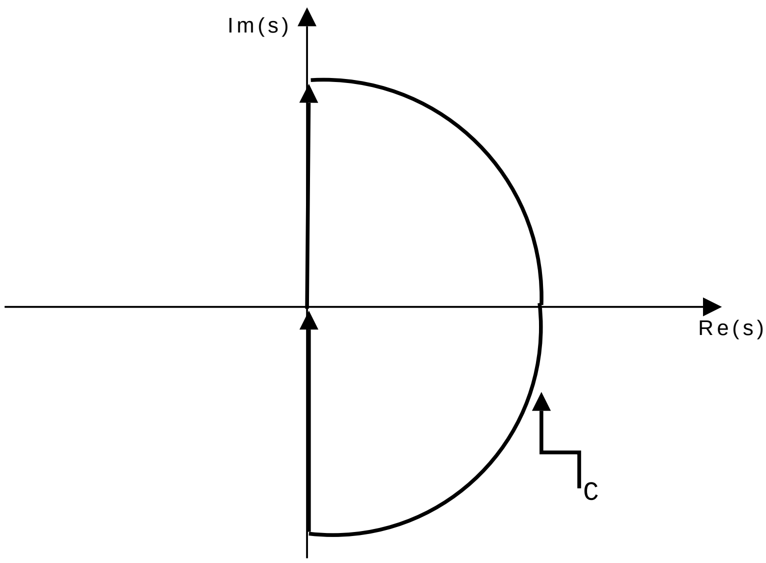

Figure 1: Curva $\mathcal{C}$ en el plano complejo $\mathbb{C}_S$.

Definición 8. *Consideremos la transformación $z = L(s)$, que asigna a puntos del plano complejo $\mathbb{C}_S$ puntos del plano complejo $\mathbb{C}_Z$. Consideremos en $\mathbb{C}_S$ la curva (orientada) simple cerrada $\mathcal{C}$ que se muestra en Figura 1 [2](y cuyo interior es 'todo' [3] el semi-plano derecho abierto de $\mathbb{C}_S$). A la curva (orientada) $\mathcal{C}_\gamma$ en el plano complejo $\mathbb{C}_Z$ definida como $\mathcal{C}_\gamma = L(\mathcal{C})$ le llamamos Diagrama o Gráfico de Nyquist correspondiente a (la función de transferencia) L.*

Sigue directamente de la aplicación del Principio del Argumento que

$$Z = N_{(-1)} + P \ ,$$

donde

$Z -$ Es el número de ceros de F_1 dentro del semi-plano derecho abierto.

[2]En caso en que L tenga polos sobre el eje imaginario modificamos la curva $\mathcal{C}$, para evitar dichos polos, indentando dicha curva hacia adentro del semi-plano derecho. De esta manera el interior de $\mathcal{C}$ contendrá todos los polos de L que se encuentran en el semi-plano derecho abierto.

[3]La curva $\mathcal{C}$, mostrada en Figura 1, deberá ser tal que su interior incluya, todos los polos de L, y todos los ceros de F_1, que se encuentran en el semi-plano derecho abierto.

P – Es el número de polos de L dentro del semi-plano derecho abierto.

$N_{(-1)}$ – Es el número de vueltas en sentido horario de el Gráfico de Nyquist (de L) alrededor de el punto $-1 + j0$.

Hemos entonces finalmente demostrado el siguiente Teorema conocido como Criterio de Estabilidad de Nyquist.

Teorema 6 (Criterio de (Interconexión Bien Definida y de) Estabilidad de Nyquist). *Supongamos que H_1 y H_2 verifican las hipótesis **(H0)** y **(H1)**. Entonces, bajo estas hipótesis, la interconexión considerada en (6) esta bien definida y es BIBO estable, si y solo si, las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) *El Gráfico de Nyquist (de L) no pasa sobre el punto $-1 + j0$.*

(ii) *$Z = 0$. Es decir, el número de vueltas en sentido horario de el Gráfico de Nyquist (de L) alrededor de el punto $-1 + j0$, es igual a $-P$.*

Es fácil y conveniente de presentar aquí (es decir, bajo la hipótesis general **(H0)**) la siguiente condición necesaria y suficiente de interconexión bien definida.

Proposición 9. *Supongamos que la hipótesis **(H0)** se cumple. Entonces, la interconexión (6) esta bien definida, si y solo si,*

$$\lim_{|s|\to+\infty} L(s) \neq -1 \ . \tag{8}$$

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si la condición (8) se cumple, entonces $F_1^{-1} = \frac{1}{(1+L)}$ es real-racional y propia, lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ -H_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+L)} & -\frac{1}{(1+L)}H_2 \\ \frac{1}{(1+L)}H_1 & \frac{1}{(1+L)} \end{pmatrix}$$

es real-racional y propia. Entonces sus elementos son transformadas de Laplace de elementos de $\mathbb{A}_e$. Así, apelando a Proposición 8 se completa esta parte de la demostración.

($\Longleftarrow$) Si la condición (8) no se cumple, consideremos los siguientes dos casos posibles. (1.-) $L \equiv -1$. En este caso es fácil de ver que la condición de existencia de soluciones de la interconexión (6) es violada. (2.-) L no es constante. Entonces, $\frac{1}{(1+L)}$ existe y es real-racional pero no es propia. Así,

$$\begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ -H_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+L)} & -\frac{1}{(1+L)}H_2 \\ \frac{1}{(1+L)}H_1 & \frac{1}{(1+L)} \end{pmatrix}$$

es real-racional pero no es propia. Esto implica que la solución h que resuelve la ecuación (7) cumple $h \in \mathcal{D}'_+$ pero $h \notin \mathbb{A}_e$ (dado que $\mathcal{L}\{h_{11}\} = \frac{1}{(1+L)}$ implica $h_{11} \notin \mathbb{A}_e$.)

$\square$

Corolario 10. *Supongamos que la hipótesis **(H0)** se cumple. Entonces, una condición suficiente para que la interconexión (6) este <u>bien definida</u>, es que H_1 o H_2 sean <u>estrictamente propias</u>.*

Enunciemos finalmente (y por completitud) la siguiente version del Criterio de Estabilidad de Nyquist.

Teorema 7 (Criterio de Estabilidad de Nyquist). *Supongamos que H_1 y H_2 verifican las hipótesis **(H0)** y **(H1)**. Supongamos además que la condición (8) también se verifica. Entonces, bajo estas hipótesis, la interconexión considerada en (6) es <u>BIBO estable</u>, <u>si y solo si</u>, las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) *El Gráfico de Nyquist (de L) no pasa sobre el punto $-1 + j0$.*

(ii) *$Z = 0$. Es decir, el número de <u>vueltas en sentido horario</u> de el Gráfico de Nyquist (de L) alrededor de el punto $-1 + j0$, es igual a $-P$.*