

Unidad 8

DIAGRAMA DE NYQUIST

Índice

1. Introducción.
2. Del principio del argumento al criterio de Nyquist.
3. Sistemas de primer grado.
4. El circuito integrador.
5. Sistemas de segundo grado.
6. Sistemas de tercer grado.
7. Márgenes de ganancia y fase.
8. Ganancia de lazo y transferencia entrada-salida.
9. Diagramas de Flujo de Señales.
10. Análisis de un sistema realimentado no ideal.
11. Consideraciones sobre apertura del lazo.
12. Compensación de sistemas realimentados inestables.
13. Recapitulando

1. Introducción.

La definición de estabilidad adoptada y los criterios de equivalencia nos permiten decidir si una transferencia dada corresponde a un sistema estable o inestable.

Basta ubicar la posición de los polos de esa transferencia para saberlo.

Este es un criterio de estabilidad absoluto: es decir, nos informa si un sistema es estable o no.

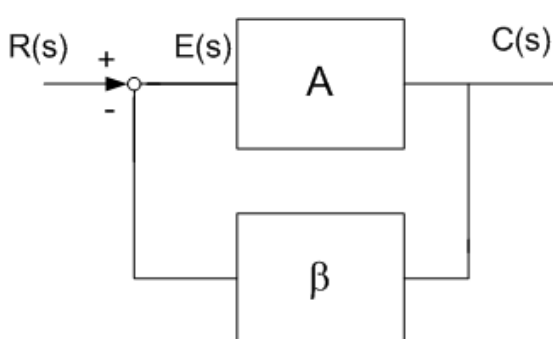
Muchas veces no alcanza con esa información: es necesario saber si un sistema es estable, cuán cerca está de dejar de serlo.

Con ese propósito, y para tener una visión más completa del problema se han desarrollado otros criterios, de los cuales en el presente módulo analizaremos el criterio de Nyquist.

2. Del principio del argumento al criterio de Nyquist.

De la definición de estabilidad y la condición N y S vista, sabemos que la transferencia no puede tener polos en el semiplano derecho $\text{Re}(s) \geq 0$.

Sea el diagrama de bloques:



E, de Error
R, de Referencia
C, de salida Controlada

¿Cuál es la transferencia del sistema realimentado?

$$\begin{cases} E = R - \beta C \\ C = AE \end{cases} \Rightarrow C = A(R - \beta C) = AR - A\beta C \Rightarrow C = \frac{A}{1 + A\beta} R$$

La transferencia del sistema realimentado es pues: $W = \frac{C}{R} = \frac{A}{1 + A\beta}$

$A\beta$ tiene una interpretación concreta: es la ganancia del lazo abierto (open loop gain): anulamos R, abrimos el lazo en cualquier punto, inyectamos una señal 1, y ¿qué obtenemos? $-A\beta$.

$$W = \frac{A}{1 + A\beta}$$

Los polos de W son los ceros de $1+A\beta$. (En caso excepcional, también un polo de A si es un cero de β . Pero esta condición es muy difícil de realizar en la práctica).

Se trata de hallar un método gráfico para detectar ceros (y polos) de $1+A\beta$ en el semiplano derecho.

Para ello, recordemos algunos resultados de funciones de variable compleja.

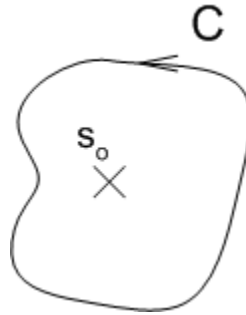
1) Si una función $f(s)$ en una singularidad aislada s_0 tiene un desarrollo de Laurent:

En un entorno:
$$f(s) = \dots + \frac{a_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{a_{-1}}{s-s_0} + a_0 + a_1(s-s_0) + \dots$$

a_{-1} es el residuo de $f(s)$ en s_0 .

2) Si tomamos una curva cerrada que rodee a s_0 .

Consideramos $\oint_C f(s) ds$



Todos los términos se van al integrar,

salvo el $\frac{a_{-1}}{s-s_0}$, cuya integral vale el residuo por el incremento del logaritmo, que es $j2\pi$

veces las vueltas que la curva rodea a s_0 .

Más general:
$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C f(s) ds = \sum n_i r_i$$

$\left\{ \begin{array}{l} r_i, \text{ residuo en punto singular } s_i \\ n_i, \text{ n}^\circ \text{ de veces que } C \text{ rodea a } s_i \end{array} \right.$

en los polos que quedan dentro de C

3) Si ahora consideramos:

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \underbrace{\sum n_i N_i}_Z - \underbrace{\sum p_i P_i}_P$$

n_i , n° de veces que C rodea a un cero de multiplicidad N_i

p_i , n° de veces que C rodea a un polo de multiplicidad P_i

Salga de que si p ej $s = a$ es un cero de orden m :

$$f(s) = (s-a)^m \varphi(s), \text{ con } \varphi(s) \text{ regular}$$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{m}{s-a} + \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}$$

Entonces, para $\frac{f'(s)}{f(s)}$, $s = a$ es un polo simple y el residuo es m .

Análogamente, si $s = b$ es un polo de orden k , se ve que $\frac{f'}{f}$ tiene un polo simple en $s = b$, con residuo $-k$.

4) La misma integral tiene otra interpretación:

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \frac{1}{j2\pi} \Delta \log f(s)$$

Mientras s se mueve sobre C , $f(s)$ se mueve sobre Γ ; decimos que C (plano s) se mapea en una curva Γ del plano $f(s)$.

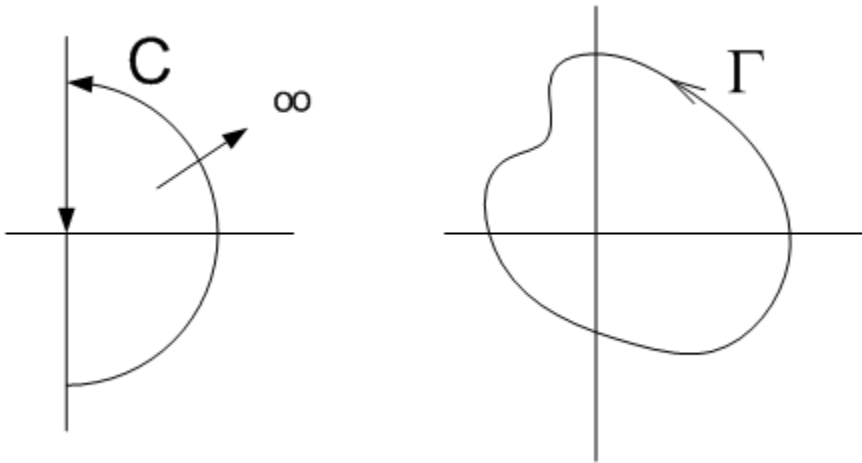
Y el 2° miembro es el número de vueltas (antihorarias) que Γ da respecto al origen.

Ahora apliquemos estas herramientas al problema que nos interesa.

$$f = 1 + A\beta$$

Queremos saber cuantos ceros tiene en el semiplano derecho.

Tomamos en el plano s una curva así:



En el plano de $1+A\beta$, tendremos una curva Γ .
 Contamos las vueltas que da respecto al origen. Son: $Z - P$.
 Si sabemos (o averiguamos) P , podemos calcular Z ; sabemos si hay o no ceros de $1+A\beta$ en el semiplano derecho.
 En la mayoría de los casos simples, $P = 0$ (decimos que el sistema open loop es estable) y directamente, si Γ rodea al origen, el sistema realimentado es inestable.

Todavía, para llegar al criterio de Nyquist clásico, se hacen dos cambios.

- 1) Dibujamos $A\beta$ (y no $1+A\beta$) y contamos las vueltas respecto al punto $(-1,0)$
 $A\beta$ es (recordar) la ganancia del lazo, cambiada de signo.
- 2) Cambiamos el sentido de giro, tanto en C como en Γ (ambas en sentido horario).

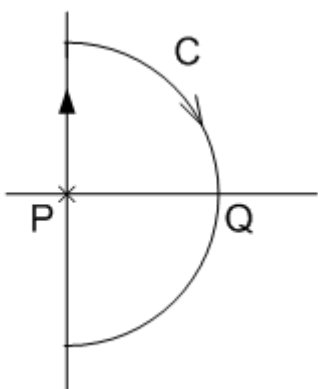
Se podrá decir: ¿para qué complicarnos tanto? ¿por qué no hallar la transferencia global y ubicar sus polos directamente?

Como veremos, el Nyquist se presta a otras consideraciones que enriquecen el estudio de la estabilidad.

3. Sistemas de primer grado.

Ej: Supongamos que en un cierto sistema, la ganancia de lazo abierto es:

$$A\beta = \frac{K}{s+a} \quad (K, a > 0)$$

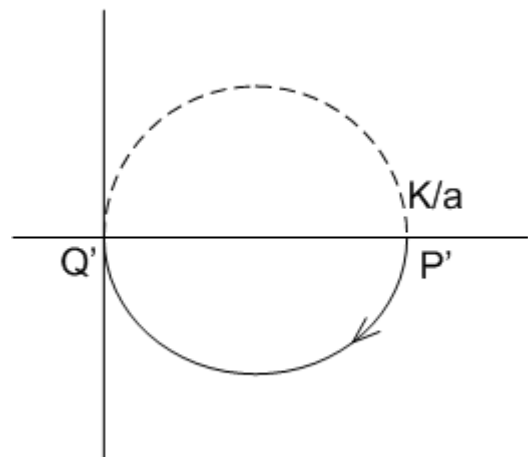


- 1°) $A\beta$ no tiene polos en el semiplano derecho ($P = 0$) \Rightarrow Por Nyquist, cuento las vueltas de Γ y eso me da Z .
- 2°) Siendo los coeficientes de $A\beta$ reales, Γ será simétrica respecto al eje real. Nos alcanza con determinarla desde P hasta Q .
- 3°) Como las funciones analíticas establecen una representación conforme, sabemos que si describo C dejando el área de interés a la derecha, lo mismo sucede con Γ .
 Si C hace un giro de 90° , lo mismo sucede con Γ .

Ahora sí: a partir de P , en el eje imaginario:

$$A\beta = \frac{K}{j\omega + a}$$

Para $\omega = 0$ estamos en K/a .
 ¿Con qué pendiente arranca?



Para ω pequeño, $A\beta$ arranca hacia abajo (flechita)

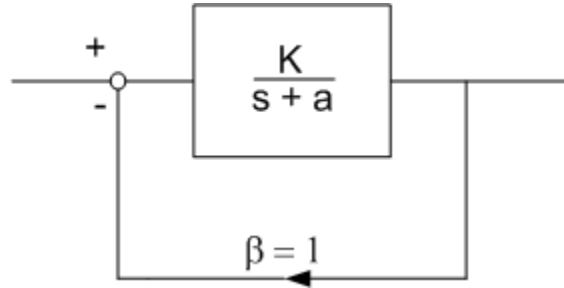
$$\Delta A\beta \cong (A\beta)' \Delta s = \frac{-K}{a^2} j\Delta\omega \quad \text{o sea que arranca hacia abajo a } 90^\circ.$$

¿Se reconoce esta representación conforme? Es la inversa de una recta.

Es una circunferencia, que muere en el origen para $\omega \rightarrow \infty$.

Luego: no rodea al punto crítico; es estable.

Sería este caso:

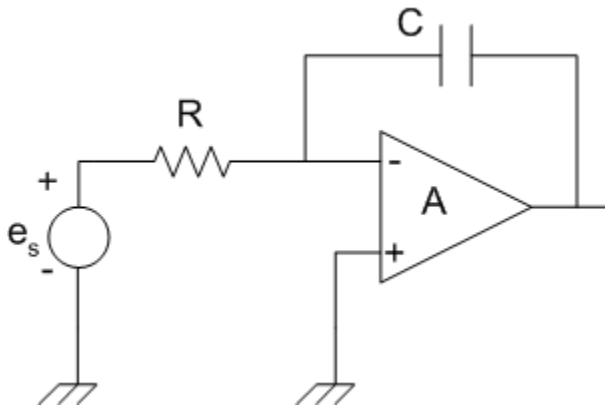


$$A\beta = -\text{Loop Gain} = \frac{K}{s+a}$$

Transferencia: $\frac{\frac{K}{s+a}}{1 + \frac{K}{s+a}} = \frac{K}{s+a+K}$, siempre estable pues su polo es $s = -(a+K)$

4. El circuito integrador.

Recordemos el caso del integrador.



Es un circuito realimentado. Pero no se ajusta claramente al diagrama de bloques. Lo que hacemos es: abrir el lazo y calcular la ganancia del lazo (inyectando una señal 1)

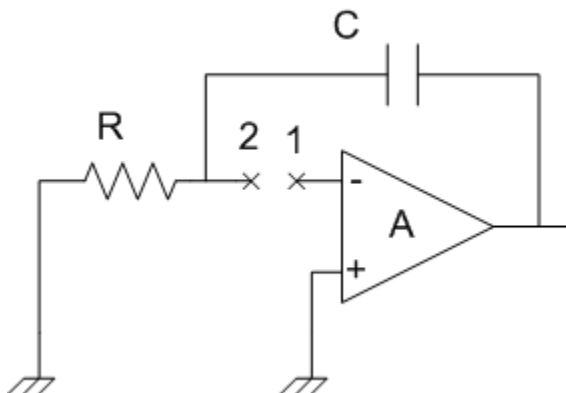
¿Dónde abrimos el lazo? En algún lugar conveniente.

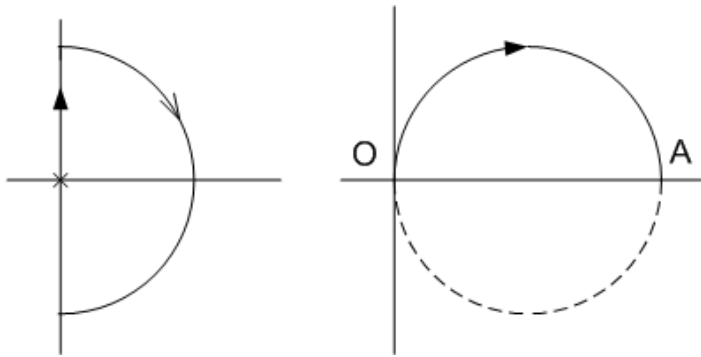
Si en 1 inyectamos una señal e, en 2 obtenemos:

$$e \cdot (-A) \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}}$$

Luego, la ganancia del lazo es $\frac{-ARC s}{RC s + 1}$

Para el Nyquist: " $A\beta$ " = $\oplus \frac{ARC s}{RC s + 1}$



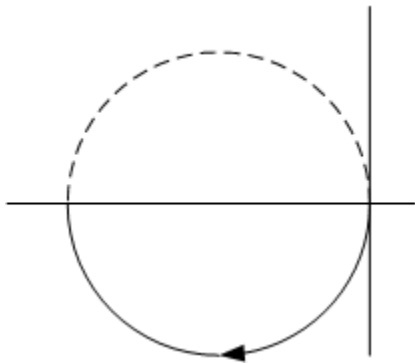


Es una transformación bilineal: $s = 0 \rightarrow A\beta = 0$
 $s = \infty \rightarrow A\beta = A$

Es una circunferencia.

Es estable, pues no rodea a -1. (y $P = 0$)

Atención: si A fuera negativo (o lo que es lo mismo realimentáramos a la pata +), el Nyquist pasa a ser



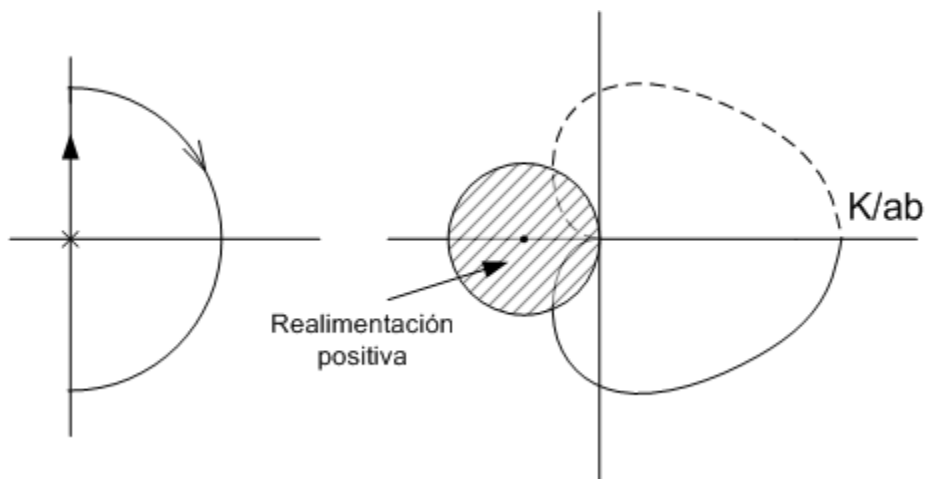
y es inestable.

5. Sistemas de segundo grado.

Si el sistema es de 2º grado

$$A\beta = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

Se tiene algo así:



El Nyquist arranca de K/ab

Pero ahora cruza el eje imaginario y muere en el origen (para $\omega = \infty$)

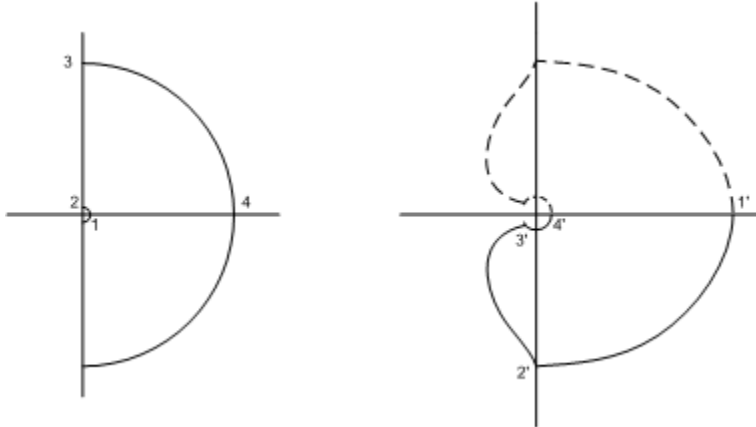
¿Con qué pendiente? Observamos que para s muy grande, se comporta como $\frac{K}{s^2}$.

Llega al origen con ángulo 180° , por lo tanto no rodea al origen y es estable. Obsérvese que en la zona en que invade la circunferencia rayada, la realimentación es positiva, pero no llega a ser inestable.

Si el sistema es de 2° grado pero con un polo en el origen.

$$A\beta = \frac{K}{s(s+a)}$$

Eludimos el origen, modificando C



De 1 a 2 $s = re^{j\varphi}$,

$$A\beta \cong \frac{K}{as} = \frac{K}{ar} e^{-j\varphi} \quad \text{Voy con módulos muy grandes}$$

de $1'$ a $2'$

En 2, giro 90° a la derecha \Rightarrow en $2'$ también.

De 2 a 3, $s = j\omega \Rightarrow A\beta = \frac{K}{j\omega(j\omega + a)}$ $A\beta$ se acerca a 0, con fase entre -90° y -180°

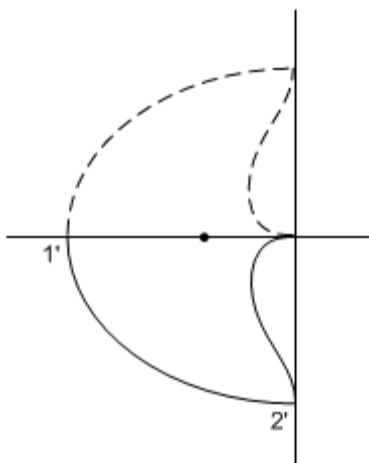
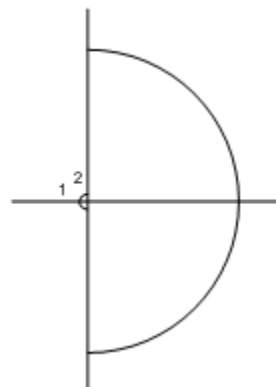
o sea siempre en el 3er cuadrante.

Para ω muy grande, me acerco al origen con pendiente -180° .

En realidad, el tramo llega a $3'$, cerca del origen De 3 a 4, $s = Re^{j\varphi} \Rightarrow A\beta \cong \frac{Ke^{-j2\varphi}}{R^2}$

Es estable.

Ver que si contorneamos el origen por el otro lado, el Nyquist se modifica



El Nyquist da ¿cuántas vueltas -horarias? -1

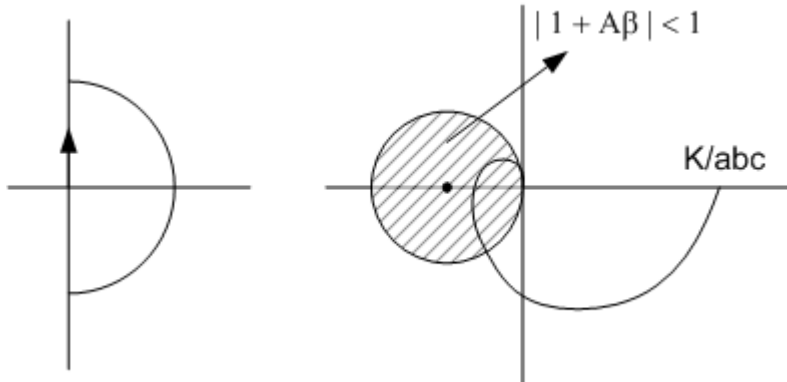
$Z-P = -1$

Pero $P = 1$ (el origen, que quedó dentro) $\Rightarrow Z = 0$ Estable

6. Sistemas de tercer grado.

Si el sistema es de 3er grado.

$$A\beta = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$



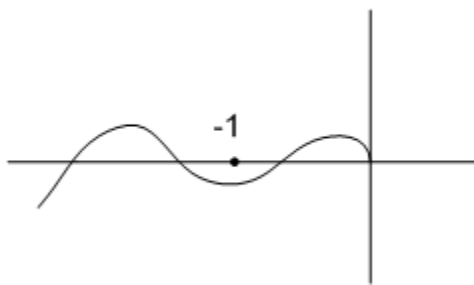
Arranca de K/abc .

Va a llegar al origen con pendiente $-3 \times 90^\circ$, ya que cada factor del denominador defasa 90° .
Puede rodear o no al punto crítico.

Si es estable en un caso y aumentamos la ganancia K , termina por rodear al punto crítico (inestable).

Esto tiene importancia al diseñar: no superar el punto crítico.

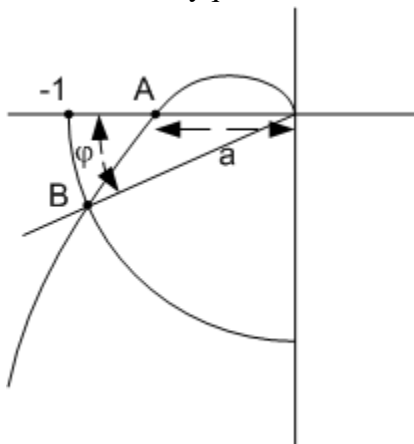
En algún otro caso:



el sistema es condicionalmente estable. Pasa a ser inestable aumentando (o disminuyendo) la ganancia.

7. Márgenes de ganancia y fase.

Muchas veces interesa estudiar no sólo si un sistema es estable, sino cuán estable es. Para ello, el Nyquist es una herramienta ideal.



Según cuán cerca pasemos del punto crítico, el sistema será más o menos estable

Se definen dos parámetros para medir esto.

1º) Al subir (variar) la frecuencia, llego a un defasaje de 180° en la ganancia del lazo (punto A).

Llamo Margen de Ganancia a $MG = \frac{1}{a} - 1$

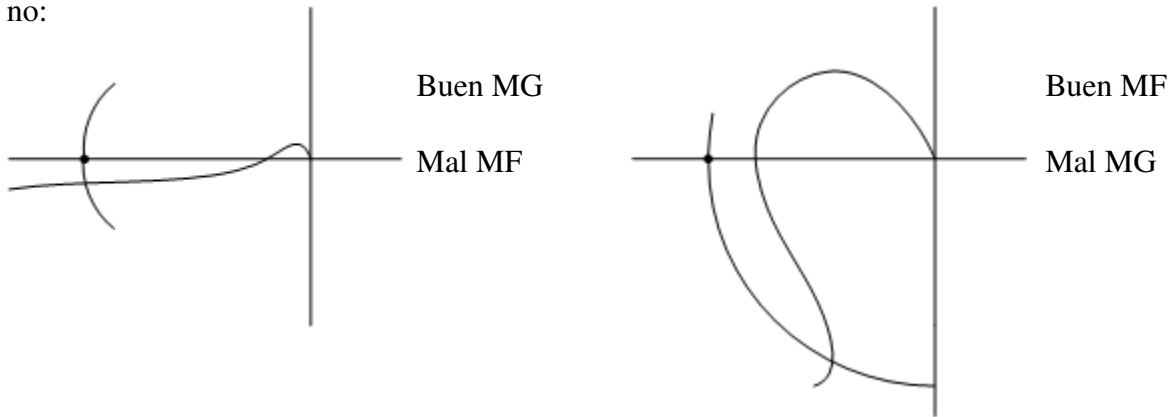
Es una medida de lo que podemos aumentar la ganancia (sin cambiar las fases), manteniéndonos estable.

2º) Cuando el módulo de la ganancia del lazo llega a 1, (punto B, llamado “crossover”), lo hace con una fase que no llega a 180°

Margen de Fase $MF = \varphi = 180^\circ - |\text{Arg}(A\beta)|$

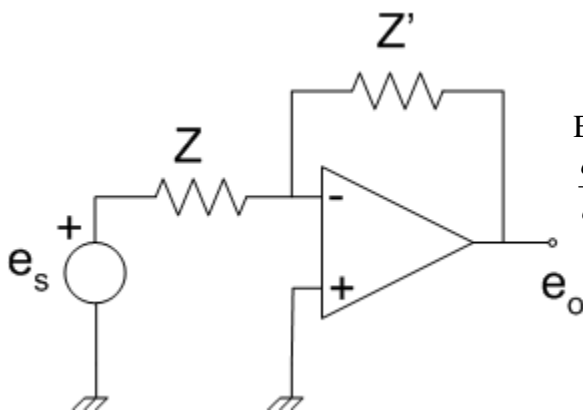
Es el defasaje que puedo agregar (sin cambiar la ganancia).

En general, ambos márgenes están de acuerdo. En casos patológicos, como los siguientes, no:



8. Ganancia de lazo y transferencia entrada-salida.

Retomemos la configuración conocida:



En su oportunidad, ya calculamos:

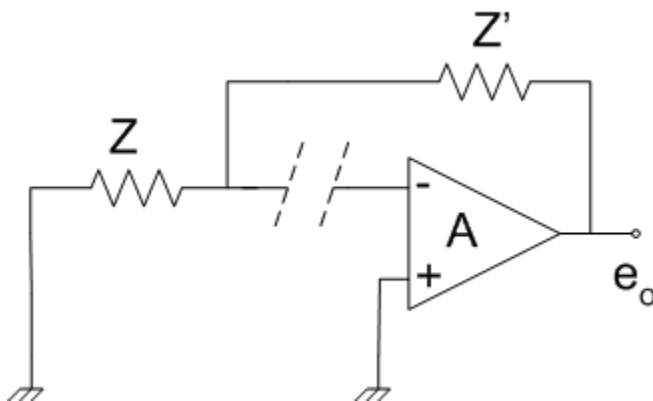
$$\frac{e_o}{e_s} = -\frac{AZ'}{(A+1)Z + Z'}$$

Y vemos que si $A \rightarrow \infty$, reencontramos:

$$\frac{e_o}{e_s} = -\frac{Z'}{Z}$$

Examinémoslo con las herramientas de realimentación.

Cuando abrimos el lazo; la ganancia del lazo es:



$$\text{Loop Gain} = -\frac{AZ}{Z + Z'}$$

Si Z y Z' son R , R'

$$\text{Loop Gain} = -\frac{AR}{R + R'}$$

¿Cómo se interpreta?

Inyectamos una señal y el lazo nos devuelve una de polaridad opuesta.

(realimentación negativa)

Si realimentamos a la pata positiva, $\text{Loop Gain} = \frac{AR}{R + R'}$; inyectamos una señal y el lazo nos devuelve una señal de igual polaridad.

Sin embargo, no es cierto que la transferencia entrada-salida sea $\frac{A}{1 + A\beta}$

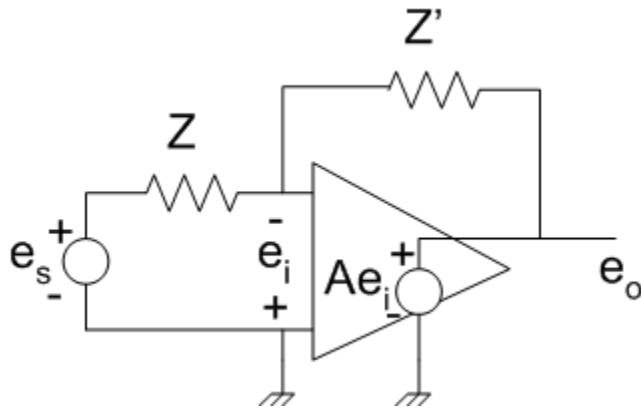
$$\frac{e_o}{e_s} \neq \frac{-A}{1 + \frac{AZ}{Z + Z'}} = \frac{-A(Z + Z')}{Z' + (A + 1)Z}$$

El denominador es el correcto; el numerador no. ¿Por qué?

Lo que sucede es que esta no es la configuración exacta del análisis.

El error viene de aplicar la fórmula obtenida en el diagrama bloque inicial, que no corresponde exactamente a este caso.

En lugar de analizar configuración por configuración, veamos un método alternativo.



Aplicando método de los nudos,

$$\begin{cases} \text{Nudo de entrada:} & -e_i = \frac{Z'}{Z+Z'}e_s + \frac{Z}{Z+Z'}e_o \\ \text{Amplificador:} & e_o = Ae_i \end{cases}$$

$$\text{Sustituyo: } e_o = Ae_i = -\frac{AZ'}{Z+Z'}e_s - \frac{AZ}{Z+Z'}e_o \Rightarrow \frac{e_o}{e_s} = \frac{-AZ'}{1 + \frac{AZ}{Z+Z'}} = -\frac{AZ'}{Z' + (A+1)Z}$$

como antes.

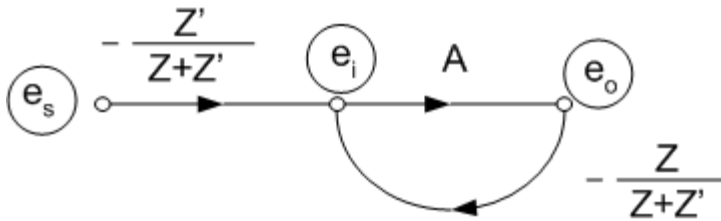
La transferencia no es exactamente $\frac{A}{1+A\beta}$. El denominador sí; el numerador no.

9. Diagrama de “Flujo de Señales”.

Se trata de interpretar gráficamente las relaciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Para el sistema de dos ecuaciones:

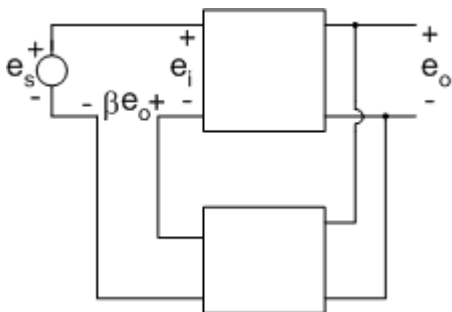
“Dibujemos” las ecuaciones:



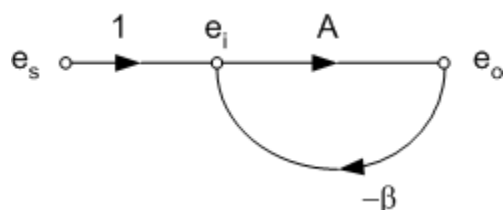
Esto es lo que hace la Teoría de Signal Flow.

Se vincula con gráficos, en que cada elemento tiene una transferencia asociada, y el desarrollo de la teoría permite transformar gráficos en otros equivalentes.

En el caso teórico inicial:



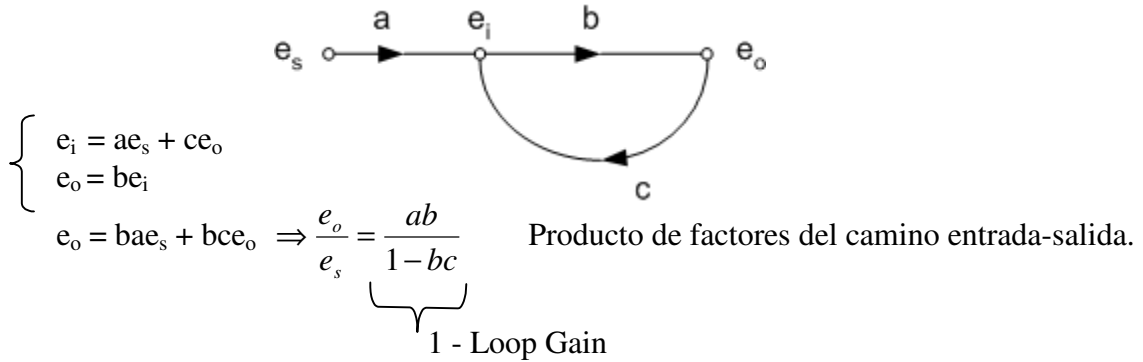
$$\begin{cases} e_i = e_s - \beta e_o \\ e_o = Ae_i \end{cases}$$



El dibujo del Signal Flow nos permite reconocer A y β (En el 1er caso $\beta = +\frac{Z}{Z+Z'}$)

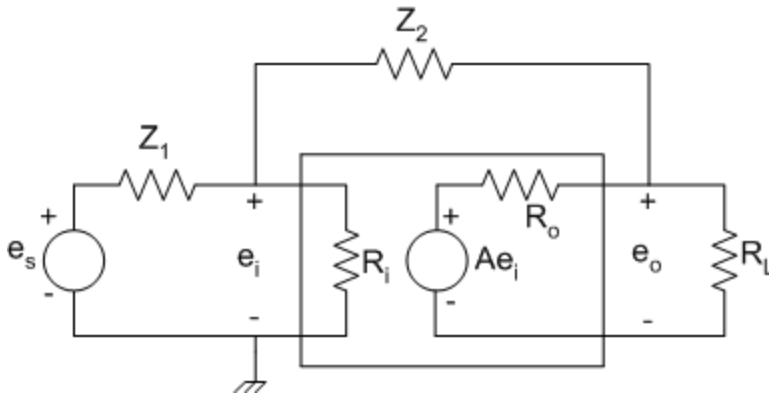
Además, del Signal Flow saco la transferencia global entrada-salida.

Así:



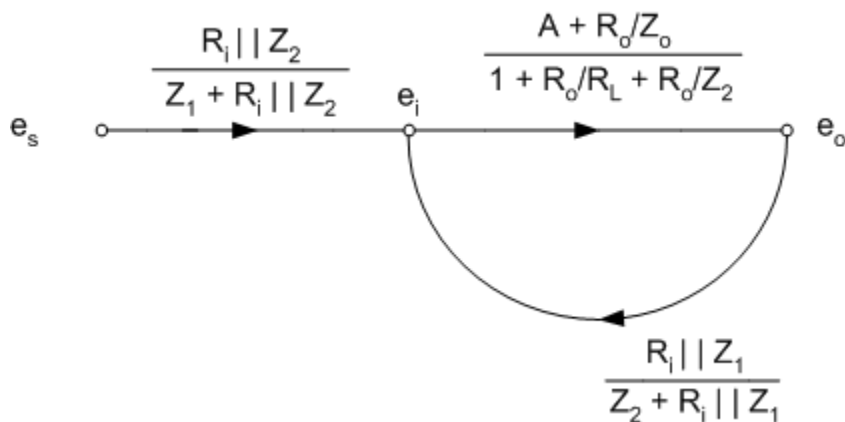
10. Análisis de un sistema realimentado no ideal.

Como aplicación final, veamos el caso del operacional realimentado no ideal ($A \neq \infty$; $R_i \neq \infty$; $R_o \neq 0$), cargado además con R_L .



$$e_i = \frac{R_i \parallel Z_2}{Z_1 + R_i \parallel Z_2} e_s + \frac{Z_1 \parallel R_i}{Z_2 + Z_1 \parallel R_i} e_o$$

$$e_o = Ae_i - R_o \left(\frac{e_o}{R_L} + \frac{e_o - e_i}{Z_2} \right) \Rightarrow \frac{e_o}{e_i} = \frac{A + \frac{R_o}{Z_2}}{1 + \frac{R_o}{R_L} + \frac{R_o}{Z_2}}$$



También podemos hacerlo abriendo el lazo.

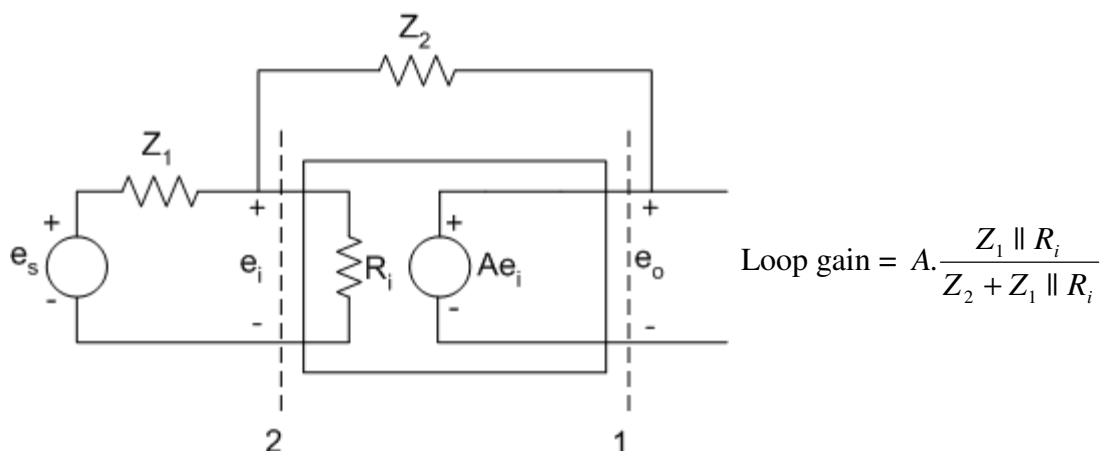
En este caso, al calcular el loop gain, hay que cargar adecuadamente.

Si abrimos el lazo a la entrada del operacional, cuando llegamos de vuelta, hay que tener en cuenta la carga de R_i . Recordar que cuando “abrimos” el lazo, se trata de una apertura ficticia, para ayudar a visualizar el procesamiento de la señal que lo recorre.

Si por error no tenemos en cuenta la carga de R_i , pondríamos $\beta = \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1}$, lo cual está mal.

11. Consideraciones sobre apertura del lazo.

En el caso particular: $R_o = 0$ $R_L = \infty$



Podemos abrir el lazo en 1 o en 2 lo que da el mismo resultado, pero si lo abrimos en 2, al retornar tenemos que contemplar la carga de R_i :

Como moraleja, conviene abrir el lazo en puntos convenientes, (desde donde vemos hacia atrás $R_o = 0$ o hacia delante $R_i = \infty$) si existen.

Por otro lado, debe observarse que cuando el amplificador es de ganancia infinita (caso del operacional ideal), no se puede abrir el lazo a la entrada, ya que al inyectar una señal auxiliar finita “e”, el amplificador entregaría una salida infinita.

12. Compensación de sistemas realimentados inestables.

Con todo lo visto, para estabilizar un sistema realimentado, se trata de cambiar la forma de las curvas de módulo y fase de $A\beta$, cuando estamos cerca de $\text{Arg}A\beta = 180^\circ$

Surgen diferentes métodos de compensación. Solo daremos alguna idea. Supongamos un diagrama de 3 polos, como el de la figura.

Es fácil verificar que es inestable. (Basta ver que en el “crossover” la fase es del orden de $180^\circ + 45^\circ$)

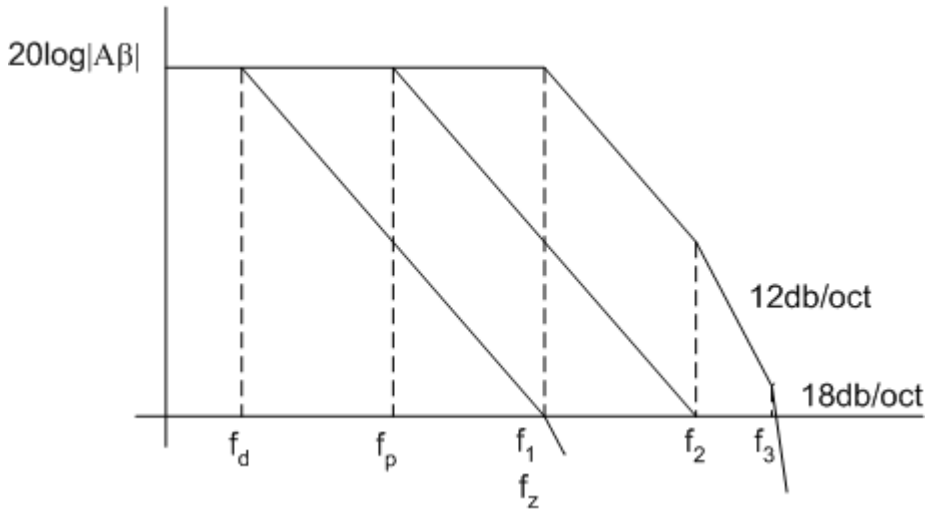
1°) Compensación por atraso de fase (phase lag) o polo dominante.

Consiste en agregar un polo dominante, es decir, de menor magnitud (frecuencia) que los otros polos de la transferencia.

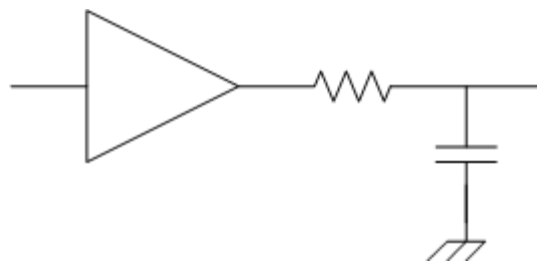
De esa manera, la ganancia del lazo cae a 0db con una pendiente de 6 db/octava a una frecuencia en que los otros polos no generan un defasaje apreciable.

Si la nueva $A\beta$ es $(A\beta)_N = \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_d}} A\beta$ con $f_d \ll f_1$ (polo más bajo de $A\beta$):

El sistema original es inestable: llega a 0db con más de 180° .



En el ejemplo, elegimos el polo dominante de modo que la ganancia caiga a 0db para f_1 (1er polo del no compensado) En f_1 , el defasaje total será unos 90° de f_d y 45° de f_1 . Cuando llegamos a 180° , ya $|A\beta| < 1$ (negativo, en db)
 ¿Cómo se implementa? Basta agregar un pasabajo en serie.



Inconveniente: Reduce fuertemente el ancho de banda (la caída de 3db era $\approx f_1$; ahora $\approx f_d$)

2º) Algo más sofisticado: compensación por pareja cero-polo.

Así como un polo agrega un atraso de fase, un cero agrega un adelanto (lead).

Por eso, a esta técnica se le llama lag-lead.

Agregamos un factor del tipo $\frac{1 + j \frac{f}{f_z}}{1 + j \frac{f}{f_p}}$

La idea es que el cero cancele el 1er polo del original: $f_z = f_1$

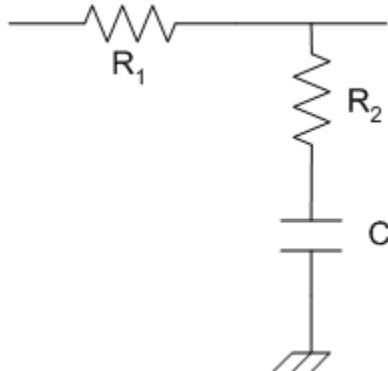
El polo asegura la caída de la ganancia.

En el esquema, el cero lo elegimos a f_1 ; y el polo, de modo que la $A\beta$ compensada caiga a 0db para el segundo polo del original (f_2).

Se observa la mejora del ancho de banda respecto a la 1ª compensación.

¿Cómo se implementa?

Intercalando:



$$\frac{R_2 + \frac{1}{C\omega j}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{1 + R_2 C \omega j}{1 + (R_1 + R_2) C \omega j}$$

$$\omega_z = \frac{1}{R_2 C}$$

$$\omega_p = \frac{1}{(R_1 + R_2) C} < \omega_z$$

En los Operacionales integrados, suele estar prevista la compensación y sólo hay que agregar un C_{ext} .

13. Recapitulando.

A partir de herramientas de variable compleja, hemos estudiado el criterio de Nyquist, que es simplemente una técnica que permite detectar mediante la construcción de un diagrama, la presencia de polos en el semiplano derecho, responsables de la inestabilidad de una transferencia.

Hemos aplicado ese criterio a diversos casos de complejidad creciente, confirmando algunos resultados conocidos (caso del integrador), y encontrando otros nuevos.

Definimos parámetros que nos informan sobre la estabilidad relativa (márgenes de ganancia y fase).

Dimos una visión superficial de los diagramas de Flujo de Señales, que permiten visualizar con claridad los lazos de realimentación, y finalmente describimos métodos clásicos de estabilización de sistemas inestables.