Notas Complementarias Sobre Líneas de Transmisión

Análisis de la Dinámica de un Sistema Compuesto por una Linea de Transmisión Conectada a una Red con Generador y a una Red de Carga

En este análisis consideraremos una linea de transmisión, sin perdidas, de longitud $l > 0$, cuyo comportamiento dinámico es descripto a través de las Ecuaciones del Telegrafista

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\ ,\\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= -C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,\end{aligned} \tag{1}$$

donde $L > 0$ y $C > 0$ son parámetros dados. Esta descripción no esta, por supuesto, completa sin la inclusion de las condiciones iniciales y de las condiciones de borde (en $z = 0$ y $z = l$). En este análisis asumiremos que la linea de transmisión esta inicialmente en reposo, es decir, las condiciones iniciales son nulas

$$v(z,0) = 0\ ,\quad i(z,0) = 0\ ,\ \forall z \in [0,l]\ .$$

Antes de ser especifico con respecto a la clase de condiciones de borde que consideraremos, la cual completara la descripción del sistema dinámico objeto de nuestro análisis, es instructivo observar que de (1) podemos, por ejemplo, derivar la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = (LC)\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}\ .$$

Dicha ecuación en derivadas parciales (es del tipo hiperbólico, y) es conocida como ecuación de onda de dimension 1. Esta ecuación en derivadas parciales nos es, por supuesto, familiar ya que se usa para modelar el fenómeno de una cuerda vibrante. (Es aconsejable, por tanto, que el lector recuerde lo que ha estudiado con referencia a este tema.) Lo peculiar y lo diferente, de la descripción o modelo del sistema físico que nosotros estamos aquí considerando (y que sera objeto de nuestro análisis), en comparación con el modelo o descripción del sistema físico (o fenómeno de una) cuerda vibrante, son precisamente las condiciones de borde. Al conectar redes circuitales en los extremos ($z = 0$ y $z = l$) de la linea de transmisión, las condiciones de bordes (que completaran la descripción de nuestro sistema dinámico) serán así, en general, ecuaciones (algebraicas y diferenciales), y la complejidad de ellas dependerá de las redes que estén conectadas en los extremos de la linea de transmisión.

Asumiremos en este análisis que la red de carga, es decir la conectada en el extremo $z = l$ esta conformada por un numero finito de resistores, capacitores, e inductores. Asumiremos también que dicha red se encuentra inicialmente en reposo. Asumiremos, que en el extremo $z = 0$ de la linea de transmisión se conecta una red conformada por un numero finito de resistores, capacitores, e inductores la cual esta inicialmente en reposo y la cual además contiene una fuente que generará la señal que excitará el sistema. Con el fin de obtener la solución de las ecuaciones (1) con esta clase general de condiciones de bordes (impuestas por la conexión con las redes antes mencionadas) resulta conveniente apelar al uso de la transformada de Laplace. Así, si existen $M_0 \geq 1$ y $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\max\{|v(z,t)|\,,\,|\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}|\,,\,|\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}|\} \leq M_0\,e^{\alpha_0 t}\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,$$
$$\max\{|i(z,t)|\,,\,|\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}|\,,\,|\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}|\} \leq M_0\,e^{\alpha_0 t}\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,$$

tendremos

$$V(z,s) = \mathcal{L}\{v(z,\cdot)\}(s) = \int_0^{+\infty} v(z,t)\,e^{-st}\,dt\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ s\,:\,\Re\{s\} > \alpha_0\ ,$$
$$I(z,s) = \mathcal{L}\{i(z,\cdot)\}(s) = \int_0^{+\infty} i(z,t)\,e^{-st}\,dt\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ s\,:\,\Re\{s\} > \alpha_0\ ,$$

y además

$$\mathcal{L}\{\frac{\partial v(z,\cdot)}{\partial z}\}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\,e^{-st}\,dt = \frac{\partial V(z,s)}{\partial z}\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ s\,:\,\Re\{s\} > \alpha_0\ ,$$
$$\mathcal{L}\{\frac{\partial i(z,\cdot)}{\partial z}\}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\,e^{-st}\,dt = \frac{\partial I(z,s)}{\partial z}\ ,\ z \in [0,l]\ ,\ s\,:\,\Re\{s\} > \alpha_0\ ,$$

y por tanto, las ecuaciones (1) se convierten en (recordemos que las condiciones iniciales son nulas)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V(z,s)}{\partial z} \\ \frac{\partial I(z,s)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -sL \\ -sC & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(z,s) \\ I(z,s) \end{pmatrix} \ , \ z \in [0,l] \ , \ s \ : \ \Re\{s\} > \alpha_0 \ . \quad (2)$$

Es ahora fácil de ver que todas las soluciones de (2) son

$$\begin{aligned} V(z,s) &= \left(V_+(s)\, e^{-s\frac{z}{v_P}} + V_-(s)\, e^{s\frac{z}{v_P}}\right) \ , \ z \in [0,l] \ , \ s \ : \ \Re\{s\} > \alpha_0 \ , \\ I(z,s) &= \frac{1}{Z_0}\left(V_+(s)\, e^{-s\frac{z}{v_P}} - V_-(s)\, e^{s\frac{z}{v_P}}\right) \ , \ z \in [0,l] \ , \ s \ : \ \Re\{s\} > \alpha_0 \ . \end{aligned}$$

donde $v_P = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$. A efectos de determinar las funciones V_+ y V_- , que determinan la solución del problema, imponemos ahora las condiciones de bordes impuestas por la conexión de la linea de transmisión con las redes. Así tenemos que

$$V_g(s) = Z_g(s) I(0,s) + V(0,s) \ , \quad V(l,s) = Z_L(s) I(l,s) \ ,$$

donde Z_L representa (o describe) la red circuital de carga, y Z_g y V_g describen la red que contiene la fuente. Estas dos condiciones de borde se pueden escribir explícitamente como

$$V_g(s) = \frac{Z_g(s)}{Z_0}\big(V_+(s) - V_-(s)\big) + \big(V_+(s) + V_-(s)\big) \ , \ \text{y}$$

$$\left(V_+(s)\, e^{-s\frac{l}{v_P}} + V_-(s)\, e^{s\frac{l}{v_P}}\right) = \frac{Z_L(s)}{Z_0}\left(V_+(s)\, e^{-s\frac{l}{v_P}} - V_-(s)\, e^{s\frac{l}{v_P}}\right) \ .$$

De donde resulta que

$$V_+(s) = \frac{1}{\left(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}}\right)} \, \frac{Z_0}{(Z_0 + Z_g(s))} \, V_g(s) \ , \quad (3)$$

$$V_-(s) = \Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}} \, \frac{1}{\left(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}}\right)} \, \frac{Z_0}{(Z_0 + Z_g(s))} \, V_g(s) \ , \quad (4)$$

donde

$$\Gamma_L(s) = \frac{(Z_L(s) - Z_0)}{(Z_L(s) + Z_0)} \ , \quad \Gamma_g(s) = \frac{(Z_g(s) - Z_0)}{(Z_g(s) + Z_0)} \ .$$

Así finalmente tenemos que

$$V(z,s) = \left(e^{-s\frac{z}{v_P}} + \Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{(2l-z)}{v_P}}\right) \frac{1}{\left(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}}\right)} \frac{Z_0}{(Z_0 + Z_g(s))} V_g(s)\ ,\ z \in [0,l]\ ,$$

$$I(z,s) = \left(e^{-s\frac{z}{v_P}} - \Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{(2l-z)}{v_P}}\right) \frac{1}{\left(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}}\right)} \frac{1}{(Z_0 + Z_g(s))} V_g(s)\ ,\ z \in [0,l]\ .$$

Observemos que las expresiones anteriores, así como también (3) y (4), nos proveen con funciones de transferencias las cuales nos permiten determinar el comportamiento dinámico del sistema (linea de transmisión) en respuesta a diferentes señales de excitación v_g . Enfoquemos ahora nuestra atención en las funciones de transferencias en (3) y en (4). Sigue de nuestras hipótesis que tanto Z_L como Z_g son funciones reales-racionales y además son funciones reales-positivas [1]. Esto implica que las funciones Γ_L y Γ_g son reales-racionales y propias, y no tienen polos en $\mathbb{C}^+$. Así tenemos que $\Gamma_L\, ,\, \Gamma_g \in \widehat{\mathbb{A}}$. Además, también concluimos que

$$|\Gamma_L(s)| \leq 1\ ,\ |\Gamma_g(s)| \leq 1\ ,\ \forall s \in \mathbb{C}^+\ .$$

Usando la notación

$$H_1(s) = \Gamma_g(s)\, e^{-s\frac{l}{v_P}}\ ,\ H_2(s) = -\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{l}{v_P}}\ ,\ L(s) = H_1(s)H_2(s)\ ,$$

sigue que $H_1\, ,\, H_2\, ,\, L \in \widehat{\mathbb{A}}$ y además, cada una de las funciones de transferencias en (3) y en (4) van a ser miembros de $\widehat{\mathbb{A}}$ cuando $\frac{1}{(1+L)} \in \widehat{\mathbb{A}}$. Recordemos que ahora, en este caso, la función L no es racional. Necesitamos un resultado que nos permita determinar (o verificar) en que caso se cumple que $\frac{1}{(1+L)} \in \widehat{\mathbb{A}}$. El siguiente resultado importante nos permitirá obtener un criterio gráfico del tipo de Nyquist para la estabilidad de esta clase de sistemas.

Teorema 1. *Supongamos que $F \in \widehat{\mathbb{A}}$. Entonces, $\frac{1}{F} \in \widehat{\mathbb{A}}$ si y solo si*

$$\exists\, \epsilon > 0\ :\ |F(s)| \geq \epsilon\ \forall s \in \mathbb{C}^+\ .$$

[1] Una función Z, real-racional, es real-positiva cuando: (i) Z es analítica en $\mathrm{Int}\{\mathbb{C}^+\}$; (ii) si tiene polos en el eje imaginario, estos son simples y con residuos reales y positivos; (iii) $\Re\{Z(s)\} \geq 0\, ,\ \forall s \in \mathbb{C}^+$ (que no es un polo).

La parte necesaria de la demostración de este resultado es una consecuencia inmediata de las propiedades de la transformada de Laplace de los miembros de $\mathbb{A}$ que ya hemos estudiado. La parte suficiente esta fuera del alcance de nuestro curso, por lo que admitiremos el resultado. Notemos que en realidad este resultado provee con una caracterización, en términos de la transformada de Laplace, de los miembros f de $\mathbb{A}$ que poseen inversa; es decir, caracteriza las $f \in \mathbb{A}$ para las que existe $e \in \mathbb{A}$ que verifica $f * e = \delta$. Tenemos así el siguiente criterio gráfico para el sistema constituido por la linea de transmisión y las redes conectadas en ambos extremos de esta.

Corolario 1. *Bajo las hipótesis asumidas en esta discusión,* $\frac{1}{(1+L)} \in \widehat{\mathbb{A}}$ *(y así cualquier transferencia que se considere corresponderá a la de un sistema BIBO estable) si y solo si se cumple que*

$$\exists\, \epsilon > 0 \,:\, |(1 + L(j\omega))| \geq \epsilon \;\forall \omega \in \mathbb{R}^+ \,. \tag{5}$$

Notemos, que lo que dice el criterio de estabilidad (5) es que $\frac{1}{(1+L)} \in \widehat{\mathbb{A}}$, si y solo si, existe un circulo de centro en $-1 + j0$ y radio $\epsilon > 0$ tal que el gráfico de Nyquist de L no entra al interior de dicho circulo. De aquí se deduce inmediatamente la siguiente condición suficiente de estabilidad.

Corolario 2. *Bajo las hipótesis asumidas en esta discusión,* $\frac{1}{(1+L)} \in \widehat{\mathbb{A}}$ *(y así cualquier transferencia que se considere corresponderá a la de un sistema BIBO estable) si se cumple que*

$$\exists\, 0 < \gamma < 1 \,:\, |L(j\omega)| = |\Gamma_g(j\omega)||\Gamma_L(j\omega)| \leq \gamma \;\forall \omega \in \mathbb{R}^+ \,. \tag{6}$$

Adicionalmente, cuando esta condición (6) se cumple, se verifica que

$$\frac{1}{(1 + L(s))} = \frac{1}{\left(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}}\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\Gamma_g(s)\Gamma_L(s)\, e^{-s\frac{2l}{v_P}}\right)^k \;,\; s \in \mathbb{C}^+ \;.$$

Completemos la presente discusión ilustrándola con un ejemplo.

Ejemplo 1. Considere una linea de transmisión sin pérdidas (es decir, $R = 0$, $G = 0$), de longitud l, impedancia característica Z_0, y cuya velocidad de face es v_P. Aquí usaremos T para denotar $T = \frac{l}{v_P}$. En un extremo de la linea se conecta una fuente (de tensión) $v_g(t)$ cuya impedancia de salida es $R_g = 3Z_0$. El otro extremo de la linea no se conecta ninguna carga (es decir, se deja abierto).

a) Halle la función de transferencia (correspondiente a la tensión) desde el generador al extremo opuesto de la linea. Exprese la respuesta en términos de T y s.

b) Halle la respuesta al impulso correspondiente a la parte **(a)**. Exprese la respuesta en términos de T y t.

c) Definamos la función (pulso de duración T_d) pu_{T_d} de la siguiente manera:

$$pu_{T_d}(t) = \begin{cases} 0\ , & t \leq 0 \\ 1\ , & t \in (0, T_d] \\ 0\ , & t > T_d \end{cases}$$

donde $T_d > 0$ es un parámetro. Asuma que la señal v_g es

$$v_g(t) = E\, pu_{\frac{T}{2}}(t)$$

donde $E > 0$ es dado. Asumiendo que la linea de transmisión está inicialmente en reposo (es decir, posee condiciones iniciales nulas), halle $v(l,t)$ (es decir, la tensión en el extremo de la linea correspondiente a la carga). Exprese la respuesta en términos de E, T y t. Además, grafíque $v(l,t)$ en el intervalo $[0, 6T]$.

Solución.- Hemos visto que

$$V(l,s) = (1 + \Gamma_L(s))e^{-Ts} \frac{1}{\left(1 - \Gamma_g(s)\Gamma_L(s)e^{-2Ts}\right)} \frac{Z_0}{(Z_0 + Z_g(s))} V_g(s)\,.$$

a) Usando los datos del problema tenemos entonces que la función de transferencia buscada es

$$H(s) = \frac{V(l,s)}{V_g(s)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-2Ts})} e^{-Ts}\,.$$

Note que se cumple que $H \in \widehat{\mathbb{A}}$.

b) Sigue directamente de la parte **(a)** que la respuesta al impulso buscada es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t - (2k+1)T)\,.$$

Usted puede verificar que la distribución h es efectivamente un miembro de $\mathbb{A}$.

c) Sigue entonces (de la parte **(b)**) que

$$v(l,t) = (h * v_g)(t) = \frac{E}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^k \, \mathrm{pu}_{\frac{T}{2}}(t - (2k+1)T)\,.$$

Así, en el intervalo $[0, 6T]$, $v(l,t)$ se puede expresar también de la siguiente manera:

$$v(l,t) = \frac{E}{2} \begin{cases} 1\,, & t \in (T, \frac{3T}{2}] \\ \frac{1}{2}\,, & t \in (3T, \frac{7T}{2}] \\ \frac{1}{4}\,, & t \in (5T, \frac{11T}{2}] \\ 0\,, & t \text{ perteneciente al resto del intervalo} \end{cases}$$

La gráfica pedida (y no mostrada aquí) sigue fácilmente de la expresión anterior.