Unidad 7

ESTABILIDAD

Indice.

1. Introducción.

Una propiedad de esencial importancia para todo sistema es su estabilidad. Corresponde para su estudio empezar por precisar una definición que formalice la idea intuitiva que todos tenemos de un sistema estable.
A partir de la definición, se tratará de hallar un criterio de equivalencia, que permita saber si un sistema lineal es estable, a partir de determinadas características del mismo: concretamente de su transferencia.
El tema de la estabilidad encuentra importantes aplicaciones en el caso de los sistemas realimentados, por lo que encararemos el estudio de éstos, sus parámetros y propiedades.
Interesa saber cómo se modifica la conducta de un sistema cuando se realimenta. Veremos que la modificación depende esencialmente del tipo de realimentación: positiva o negativa. En general, destacaremos las ventajas de la realimentación negativa y el precio de tales ventajas.
Los distintos esquemas de realimentación se vinculan con distintos tipos de amplificador básico, de los cuales el de voltaje es el más empleado, pero no el único.
Consideraciones cualitativas nos llevan al llamado criterio de Barkhausen, al que se recurre cuando lo que interesa es diseñar un tipo de circuito inestable: el oscilador.
Daremos una rápida y superficial visión de los conceptos de Sistemas de Control, deteniéndonos en un ejemplo sencillo: la escoba invertida, que muestra los resultados que se obtienen recurriendo a distintas estrategias de control.

2. Definición:

“Un sistema lineal es estable si (y solo si) a toda señal de entrada que sea una función acotada, corresponde una señal de salida también función acotada”.

3. Criterio de equivalencia.

Busquemos un criterio equivalente a la definición.
Consideremos dos casos: 1) la respuesta al impulso w(t) es una función.
2) “ “ “ “ “ “ “ distribución.

<u>Caso 1)</u> La condición N y S de estabilidad de un sistema lineal es que
$\int_0^{+\infty} |w(t)dt| < \infty$

<u>Suficiente</u>.
Sea x(t) una entrada acotada: |x(t)| < M
y(t)=w(t)∗x(t)

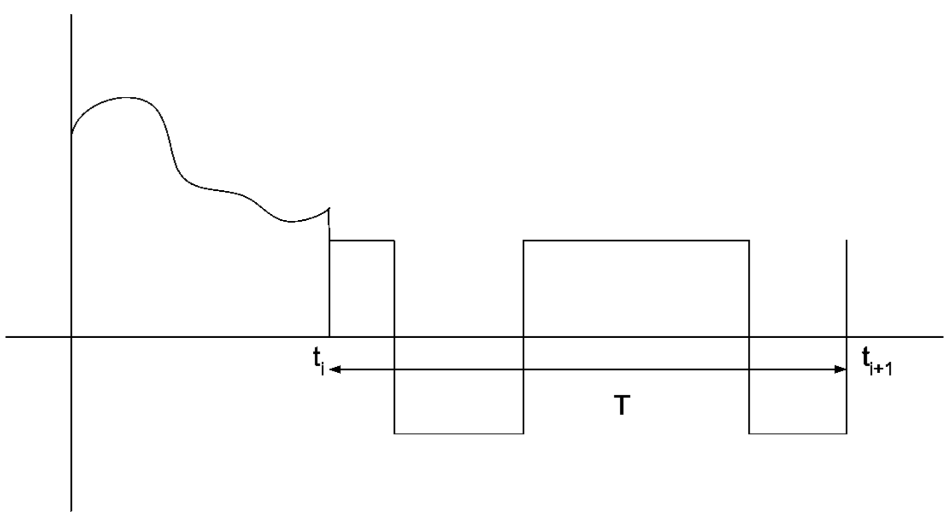
Como son funciones: y(t)= $\int_0^{+\infty} w(\tau).x(t-\tau)d\tau$

En módulo: $|y(t)| \leq \int_0^{+\infty} | \quad | d\tau \leq M\int_0^{+\infty} |w(\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow$ y(t) está acotada.

<u>Necesaria</u>.
Procedamos por el absurdo. Probaremos que si no se cumple la condición, se puede encontrar una x(t) acotada tal que su y(t) no es acotada.
Construimos la x(t) de esta manera.
Empezamos por una $x_i(t)$ de soporte C_i $(0,t_i)$, acotada.
Consideramos su salida: $w*x_i$. Si no fuera acotada, ya tendríamos la y(t) buscada.
Si es acotada, tiene un extremo superior: $K_i = \sup|w*x_i|$
Como suponemos que la condición no se cumple:, es decir: $\int_0^{+\infty} |w(t)| dt$ diverge,

podemos hallar un T tal que: $\int_0^{T} |w| dt = K_i + i$

Para ese T, tomamos $t_{i+1} = t_i + T$



Definimos ahora $x_{i+1} = \begin{cases} x_i(t), & 0 \le t \le t_i \\ \text{Signo } w(t_{i+1}-t), & t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & t \ge t_{i+1} \end{cases}$

x_{i+1} así definida es: 1) acotada; 2) su soporte es $C_{i+1}(0,t_{i+1})$
Consideramos su salida: $w*x_{i+1}$ (Si no fuera acotada, ya tendríamos,-como antes- la y(t) buscada.
Si es acotada:) Podemos poner t

$$y(t) = w*x_{i+1} = \int_0^{\infty} w(t-\tau)x_{i+1}(\tau)d\tau$$

Calculemos su valor en t_{i+1}: cambio t_i por t_{i+1} y x_{i+1} por x_i

$$y(t_{i+1}) = \int_0^{t_{i+1}} w(t_{i+1}-\tau)x_{i+1}(\tau)d\tau = \int_0^{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} = \int_0^{t_{i+1}} w(t_{i+1}-\tau)x_i(\tau)d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|w(t_{i+1}-\tau)\right|d\tau =$$

cambio de variable
$t = t_{i+1} - \tau$

$$= w*x_i\Big|_{t=t_{i+1}} + -\int_{t_{i+1}-t_i}^{0} |w(t)|dt = w*x_i\Big|_{t=t_{i+1}} + K_i + i \Rightarrow y(t_{i+1}) \ge i$$

Construimos así una x(t) acotada cuya salida no es acotada.
Luego, la condición $\int |w(t)|dt < \infty$ es necesaria.

Consecuencia: Si $\int_0^{+\infty} |w(t)|dt < \infty$

La T de L de la función w(t) es: $W(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st}dt$

$$|W(s)| \le \int_0^{+\infty} |w(t)|e^{-\mathrm{Re}(s)t}dt \le \int_0^{+\infty} |w(t)|dt \le \infty$$

en $\mathrm{Re}(s) \ge 0$

Entonces: La T de L W(s) de una w(t) estable no tiene polos en el semiplano derecho completo (ni en el eje imaginario).

Caso 2) La respuesta al impulso es una distribución.

Previamente, "si w_1 y w_2 son estables, también lo es su producto convolución w_1*w_2".
En efecto: si w_2 es estable, para x acotada, w_2*x es acotada $\Rightarrow w_1*(w_2*x)$ es acotada $\Rightarrow w_1*w_2$ es estable. estable

Sea w(t) una distribución estable.
Sobre su T de L W(s) hacemos la hipótesis natural: $W(s) < Cs^k$ (en cierto semiplano derecho)

Consideramos: $w_1(t) = Y(t)e^{-t}$, que es estable, pues

$$\int_0^\infty |w_1| dt < \infty \qquad W_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Multiplicamos en convolución w con w_1 <u>k+2</u> veces, con lo que seguimos teniendo una transferencia estable. Sea w_0.

$$w_0 = w * \underbrace{w_1 * \dots * w_1}_{k+2}$$

$$W_0 = W.W_1^{k+2} = W.\frac{1}{(s+1)^{k+2}} \text{ siendo } |W| < Cs^k$$

W_0 provenía de una <u>función continua y estable</u>, por H.

$$|W_0(s)| = \left|\int_0^\infty w_0(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^\infty |w_0(t)| dt < \infty$$

para $\mathrm{Re}(s) \ge 0$

Entonces, $W_0(s)$ está acotada en el semiplano derecho $\Rightarrow$ no tiene polos en el semiplano derecho completo.

W(s) tampoco los tendrá, pues es $W(s)=W_0(s)(s+1)^{k+2}$

Luego: <u>Condición Necesaria</u>: W(s) no tiene polos en el semiplano derecho.

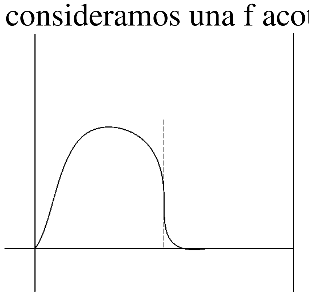
3.1 Transferencia W(s) racional.

Para ver la <u>Suficiente</u>, nos limitamos al caso de W(s) racional (cociente de polinomios).

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = as^{p-q} + \dots + \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \text{con} \quad \text{grado N} < \text{Grado D}$$

Digo que debe ser grado P $\le$ grado Q.

Si fuera grado P > grado Q, p ej p-q = 2 (la W tiene una derivada segunda) consideramos una f acotada como esta:



f acotada con derivada acotada hasta la p-q, y luego la derivada siguiente no es una función acotada.

Entonces debe ser grado P $\le$ grado Q $\Rightarrow W(s) = A + \dfrac{N(s)}{D(s)}$, con grN < GrD

W se descompone en fracciones simples, y entonces, como Y(s) = W(s)X(s)

Si x(t) está acotada, los polos de X(s) están en el semiplano izquierdo: $\mathrm{Re}(s) \le 0$.

Los polos de W(s) dan términos $t^k e^{pt}$; debe ser Re(p) < 0

$$\frac{1}{(s-p)^k} \rightarrow t^{k-1}e^{pt}$$

Entonces: condición suficiente para W(s) racional $= \dfrac{P(s)}{Q(s)}$

$$\begin{cases} \text{Grado P } \le \text{Grado Q} \\ \text{W(s) no tiene polos en el semiplano derecho (ni en el eje)} \end{cases}$$

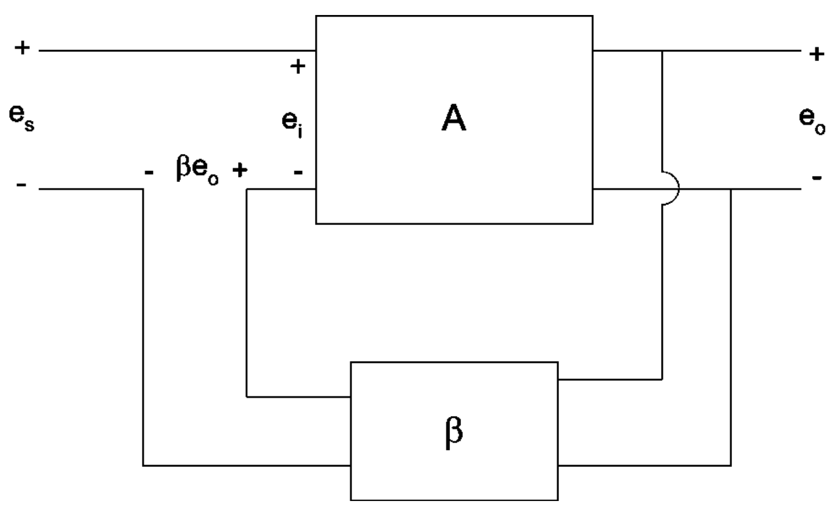
Para recordar esto último, sea el ejemplo del integrador: $W(s) = \frac{1}{s}$

Elijo x(t) =Y(t) $Y(s) = \frac{1}{s^2}$ $\Rightarrow$ y(t) =Y.t

La integral del escalón (acotado) es la rampa (no acotada).

4. Realimentación: Diagrama de bloques.

Veamos los conceptos generales de sistemas realimentados aplicados a circuitos.



El bloque A es un amplificador de ganancia A.
Tomamos una muestra de la salida: βe_o y la realimentamos a la entrada. (A y β , <u>reales</u> y > 0, por ahora).
Con la polaridad dibujada, tenemos realimentación <u>negativa</u>: la señal realimentada es opuesta a la entrada $e_i = e_s - \beta e_o$
Si la salida e_o tiende a aumentar, con e_s = cte, la señal realimentada se opone a ello disminuyendo la entrada efectiva al amplificador. (esto es una argumentación <u>cualitativa</u>; no hay retrasos en las transferencias).
Cuantitativamente,

$$e_o = Ae_i = A(e_s - \beta e_o) = Ae_s - A\beta e_o \Rightarrow \frac{e_o}{e_s} = \frac{A}{1 + A\beta} = A_f$$

En regimen sinusoidal, <u>A y β son números (complejos).</u> En realidad, son función de la frecuencia.

$$A_f = \frac{A}{1 + A\beta}$$

En general, con A, β complejos, decimos que la realimentación es negativa si <u>$|A_f| < |A|$,</u> o sea <u>$|1+A\beta|>1$.</u>

Aβ tiene una interpretación como ganancia del lazo abierto (open loop gain): anulamos la fuente e_s; abrimos el lazo en cualquier punto; inyectamos una señal 1, y ¿qué obtenemos a la vuelta del lazo?
-Aβ.

Si $|1+A\beta| < 1 \Rightarrow |A_f| > A$, la realimentación es positiva. ¿Cuál es su riesgo? La inestabilidad. (Analizar qué sucede si la salida tiende a aumentar.)

5. Propiedades de la realimentación negativa.

Visto que la realimentación negativa reduce la ganancia, ¿cuáles son sus ventajas?

$$A_f = \frac{A}{1+\beta A}$$

$$LogA_f = Log\frac{A}{1+\beta A}$$

Diferenciando: (suponemos β = cte)

$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{1+A\beta}{A}\frac{dA}{(1+A\beta)^2}$$

$$\frac{dA_f}{A_f} = \frac{1}{1+A\beta}\frac{dA}{A}$$

Es decir: la variación porcentual o relativa de la amplificación en el realimentado es menor que en el no realimentado. Si p.ej. $|1+A\beta| = 10$, el realimentado es 10 veces menos sensible frente a variaciones de los parámetros.
Normalmente, el amplificador A tiene una ganancia que varía con los parámetros de las componentes (temperatura, envejecimiento, etc. También interesa el diseño respecto al cambio de las componentes físicas; h_{fe} cambia mucho de un transistor a otro).
La realimentación desensibiliza respecto a esos cambios.
En un caso extremo, si Aβ >>1 $\quad A_f = \dfrac{A}{1+A\beta} \approx \dfrac{1}{\beta}$, la ganancia depende exclusivamente de la red de realimentación, que usualmente es pasiva, estable.

Si la red de realimentación es resistiva pura (β = cte, no depende de la frecuencia), se tendría A_f = cte o sea no hay distorsión de amplitud.
En rigor, aunque β sea constante, A no lo es, y a cierta frecuencia, deja de ser cierto Aβ>>1

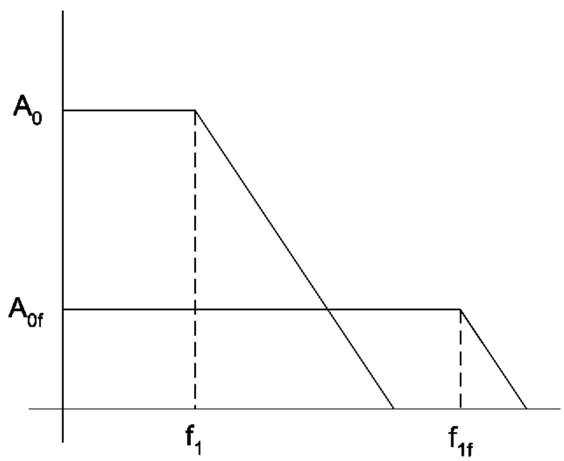
Suponiendo para la ganancia una caída con la frecuencia del tipo pasa-bajo:

$$A = \frac{A_o}{1+j\dfrac{f}{f_1}}$$

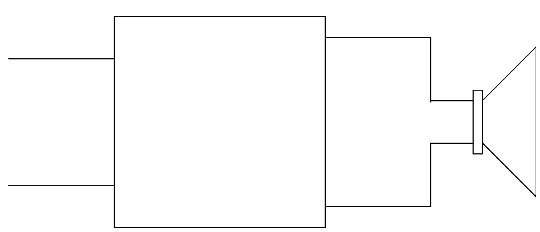
$$A_f = \frac{A}{1+A\beta} = \frac{\dfrac{A_o}{1+j\dfrac{f}{f_1}}}{1+\beta\dfrac{A_o}{1+j\dfrac{f}{f_1}}} = \frac{A_o}{1+\beta A_o + j\dfrac{f}{f_1}} = \frac{A_{of}}{1+j\dfrac{f}{f_{1f}}}$$, en que $f_{1f} = f_1(1+\beta A_o)$

dividimos por $(1+\beta A_o)$

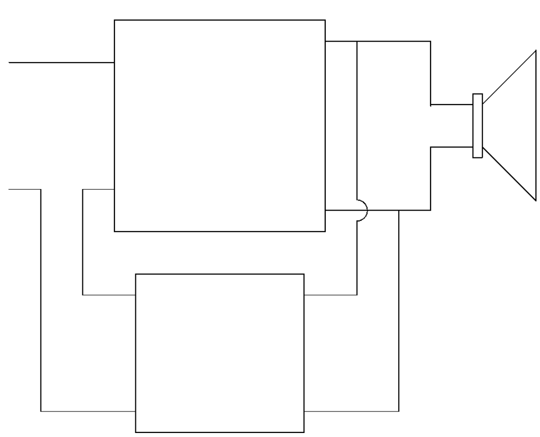
Es decir que así como la ganancia se reduce, la frecuencia de 3 db aumenta al realimentar (con el mismo factor). El producto: ganancia x ancho de banda se mantiene constante.
La distorsión de amplitud (y de fase) se reduce pues al realimentar.



También se reduce la distorsión <u>no lineal</u>.
Supongamos primero que en el amplificador no realimentado, se trabaja con señal de amplitud tal que se invade la zona no lineal. Hay distorsión no lineal.



Ahora realimentamos negativo, y aumentamos la señal de entrada, (en la misma proporción en que bajó la ganancia) para tener igual señal de salida.



Por simplicidad, supongamos que la única distorsión generada es de 2ª armónica.
Sin realimentar, sea B_2.
Realimentando, sea B_{2f}. (*)
Aceptando una 1ª aproximación lineal: $B_{2f} = B_2 - A\beta B_{2f}$ (Superponemos la distorsión generada -que depende del tamaño de la señal ⇒ es la misma en los dos casos- y la realimentada).

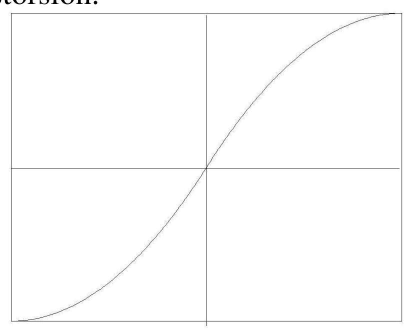
Luego: $B_{2f} = \dfrac{B_2}{1 + A\beta}$

Decíamos que para bajar la distorsión no lineal realimentamos, y para ello debemos entregar en la entrada una señal mayor, pues la ganancia es menor.
Lo que se hace es agregar una etapa de amplificación (un <u>pre</u> amplificador) que trabaja <u>linealmente</u>, y realimentar sólo la etapa de salida. La gracia está en que el preamplificador trabaja con señal chica ⇒ sin distorsión.

(*) Recordar: $y = ax + bx^2$

$x = \cos\omega t$

$y = a\cos\omega t + \frac{b}{2} + \underbrace{\frac{b}{2}\cos 2\omega t}_{B_2}$



Realimentamos:

Analizamos sólo para 2ª armónica:
Queremos tener igual fundamental que antes ⇒ aumentamos la fuente ⇒ B_2 sigue. La realimentación agrega $A\beta B_{2f}$

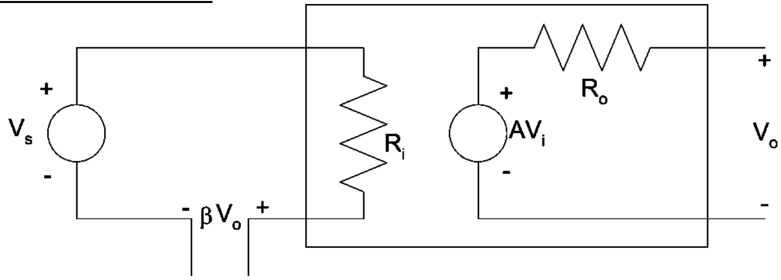
Para verlo mejor, supongamos $A = 100$ $|1+A\beta| = 10$ $V_o = 10V$ $V_i = 0.1V$
Entonces:

$V_{if} = 1V$

Si $B_2 = 1V$, $B_{2f} = 0.1V$

Algo parecido puede decirse respecto al <u>zumbido</u>: las fuentes de continua con las que alimentamos los circuitos tienen un cierto "ripple", no son estrictamente constantes.
Realimentando, se reduce el zumbido en la etapa de salida.
En el preamplificador, se trabaja con fuentes reguladas.

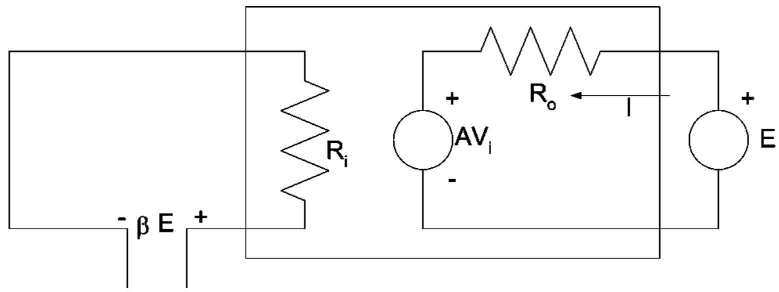
Veamos ahora como repercute la realimentación sobre la impedancia de entrada y salida.
1) <u>Impedancia de entrada</u>.



$V_s = R_iI_i + \beta V_o = R_iI_i + \beta AV_i = R_iI_i + \beta AR_iI_i \Rightarrow \frac{V_s}{I_i} = R_i(1 + A\beta)$

La impedancia de entrada se multiplicó por $(1+A\beta)$

2) <u>Impedancia de salida</u>.
Anulamos V_s y ponemos E a la salida.

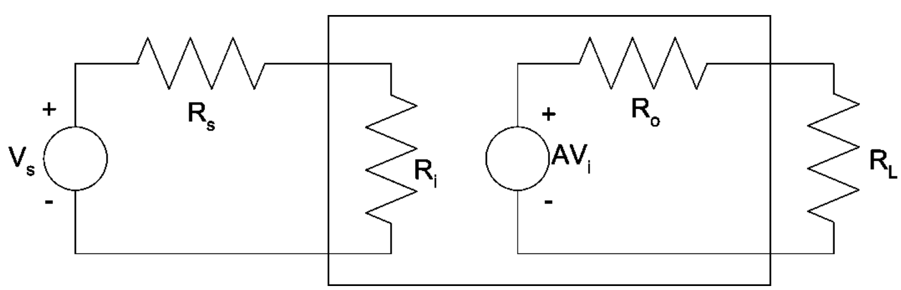


$$\begin{cases} E = R_oI + AV_i \\ V_i = -\beta E \end{cases} \qquad E + A\beta E = R_oI \qquad \Rightarrow \frac{E}{I} = Z_o = \frac{R_o}{1 + A\beta}$$

La impedancia de salida se dividió por $(1+A\beta)$

6. Los distintos esquemas de amplificadores.

En rigor, el bloque de amplificador visto recién corresponde a un "Amplificador de Voltaje".
Esto quiere decir que el amplificador es accionado por una fuente (de impedancia R_s) y tiene una cierta carga R_L.



Como ya dijimos, el amplificador "ideal" tiene $\begin{cases} R_i = \infty \\ R_o = 0 \end{cases}$

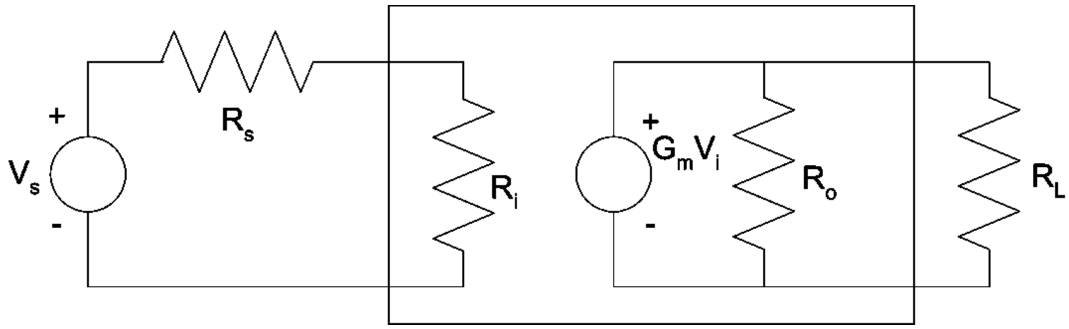
En la práctica, alcanza con que $\begin{cases} R_i >> R_S \\ R_o << R_L \end{cases}$

Si esto se cumple, el voltaje V_s aparece a la entrada V_i y el de la fuente de Thevenin sobre la carga, con lo que la ganancia de voltaje es A.

<u>$V_o \cong AV_s$, independientemente de los valores de R_S, R_L</u>.

Pueden darse otras situaciones límite.

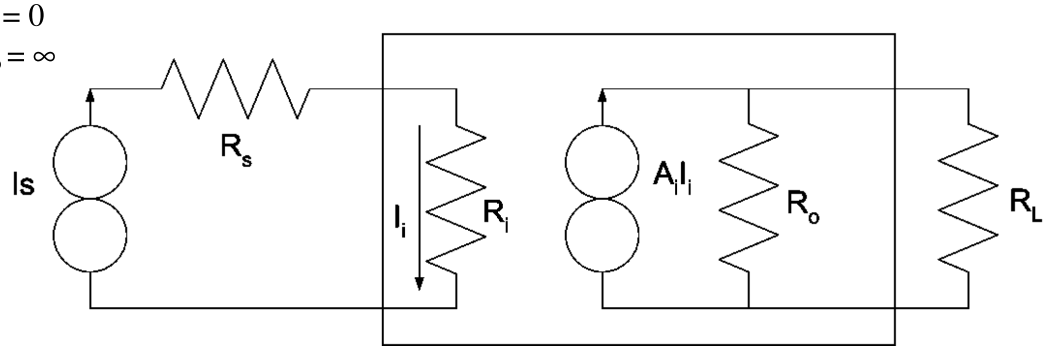
Si p.ej. $\begin{cases} R_i = \infty, \\ R_o = \infty \end{cases}$ o en la práctica $\begin{cases} R_i \gg R_s \\ R_o \gg R_L \end{cases}$ la salida actúa como fuente ideal de corriente (Norton)



El voltaje V_s aparece a la entrada V_i y la corriente de Norton circula por la carga, con lo que la transconductancia es G_m $I_L \approx G_m V_s$ <u>Amplificador de transconductancia</u> $(G_m = A/R_o)$

En los otros casos límites:

$\begin{cases} R_i = 0 \\ R_o = \infty \end{cases}$



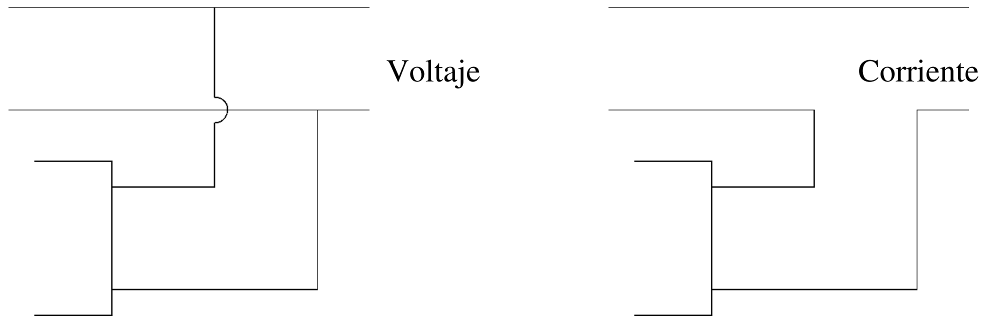
1º elegimos los equivalentes Norton; después elegimos la forma de la fuente $A_i I_i$, modificando la forma de la fuente de la configuración anterior $(A_i = G_m R_i)$

$I_L \approx A_i I_s$ <u>Amplificador de corriente</u>

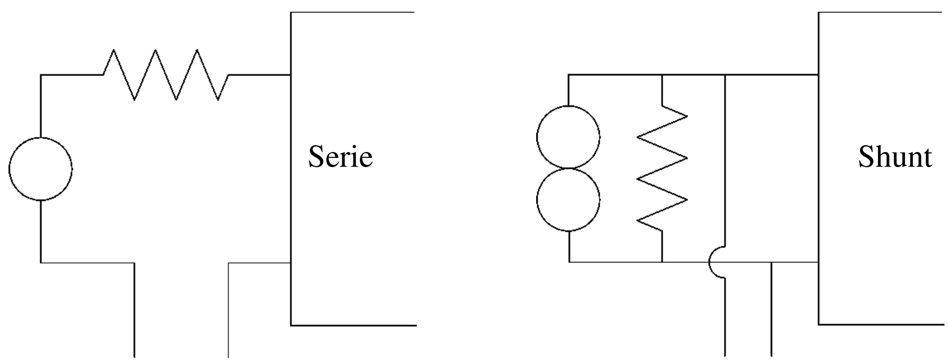
Finalmente, queda el caso:

$\begin{cases} R_i = 0 \\ R_o = 0 \end{cases}$ $V_o \approx R_m I_s$ <u>Amplificador de transresistencia</u>

Esto tiene que ver con otras posibilidades de realimentar: podemos extraer o muestrear (samplear) la señal de salida de dos maneras posibles:



Y podemos inyectar en la entrada de dos maneras posibles: <u>serie</u> y <u>shunt</u>.



7. La condición de Barkhausen.

Lo que vimos fue que la realimentación voltaje-serie mejoraba las características del amplificador original, como amplificador de voltaje.
Se puede ver p.ej. que para mejorar el de transconductancia, debería muestrearse <u>corriente</u>, y realimentar <u>serie</u>.

Observación. Como A y β son: 1º) complejos
2º) función de la frecuencia, bien puede suceder que diseñamos para realimentar negativo (para tener las mejoras vistas), y en alta frecuencia la realimentación se vuelve positiva $|1+A\beta|<1$ con lo que el circuito es inestable.
Diseñamos un amplificador; lo construimos y obtenemos un oscilador (!).

Dijimos que la realimentación positiva (o "regenerativa") implica inestabilidad.
Veamos una argumentación <u>cualitativa</u>:
Recordar $|1+A\beta| < 1 \Rightarrow |A_f| > |A|$
Supongamos que no aplicamos señal, pero por alguna perturbación aparece una señal x_o a la salida. Se realimenta $-\beta x_o$ y reaparece a la salida $-A\beta x_o$.
Si esta expresión es igual a x_o, la perturbación se ha "regenerado".
Es decir, si $A\beta = 1$ (Ganancia de Lazo = 1), el amplificador oscila.

Esto da un criterio o condición en el diseño de un oscilador a partir de un circuito realimentado.
La condición es esa: $-A\beta = 1$ (Barkhausen)
-Como $A\beta$ es función de ω, la condición se cumplirá para algún -o algunos- ω.
-Como estamos en complejos, implica dos condiciones: (P. real y P. imaginaria, o mejor Módulo y Argumento) En este caso, se puede interpretar así:

a) Defasaje total en el lazo = 0º o 360º.

b) Módulo o magnitud de la ganancia del lazo = 1 $|A\beta| = 1$

Si $|A\beta| < 1$, las oscilaciones se atenúan hasta desaparecer

Si $|A\beta| > 1$, aumentarán en amplitud. ¿Quién limita la amplitud? La no-linealidad.

Pensando ahora no en sistemas realimentados sino en transferencias:

R(s) = E(s)H(s)

Salida Entrada Transferencia

Al descomponer en fracciones simples, tenemos los términos de respuesta:

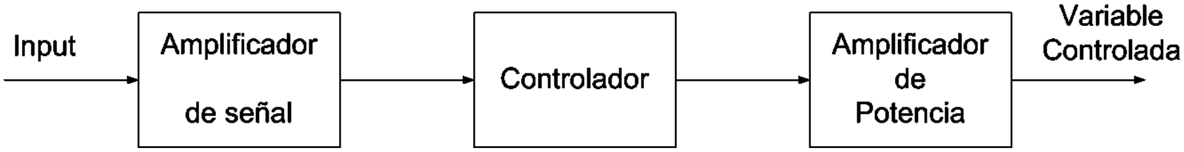
$\begin{cases} \text{propia, polos de H} \\ \text{forzada, polos de E} \end{cases}$

Los polos propios dan la respuesta propia, que puede ser amortiguada, sinusoidal o creciente.
Para tener un oscilador sinusoidal, los polos de H(s) deben estar sobre el eje imaginario.

Si $H(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, la condición será $D(j\omega) = 0$. En el caso A_f, es $A\beta+1 = 0$

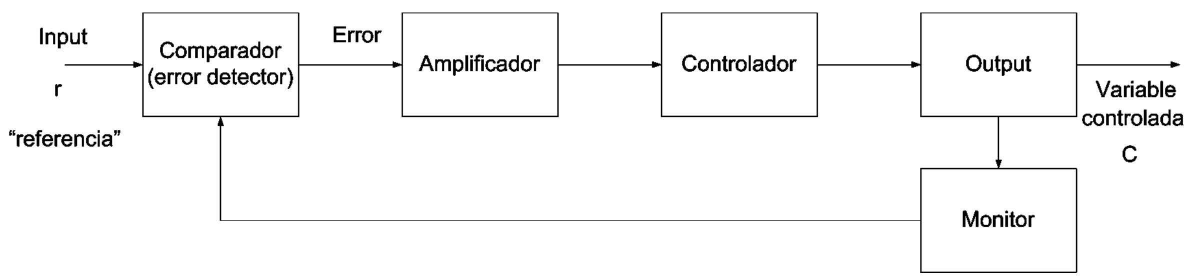
8. Sistemas de Control.

El siguiente tema guarda relación con los Sistemas de Control Automático.
Los conceptos son muy generales; se aplican en áreas que van más allá de la electrónica: ingeniería de procesos, biología, economía, etc.
El término "control" sugiere que podemos cambiar el estado de un sistema actuando sobre ciertas variables del mismo.
Para empezar, en un sistema de control, se suelen distinguir diversos bloques:



La señal de entrada, o comando, se amplifica y aplica a la salida, que puede ser remota de la entrada.
P.ej. el control de temperatura de un horno eléctrico, en que la entrada se aplica manualmente, accionando p.ej. un dial. El dial podrá comandar un potenciómetro

del circuito de control de un amplificador de potencia; la variable controlada en este caso es la temperatura del horno.
Habrá un diagrama de calibración que permite determinar la temperatura del horno, posicionando adecuadamente el dial. Ya se ve que el sistema no es demasiado confiable; la calibración se verá afectada por cosas tales como: el envejecimiento de las componentes electrónicas (que cambia sus características), la humedad, la temperatura, las variaciones de la red, etc.
El sistema visto es un caso de lazo abierto. (open loop).
En un sistema closed loop, las componentes básicas son las mismas.
Pero además: la salida real se mide y una señal correspondiente a esta medida se "realimenta" a la entrada.
Esta comparación se lleva a cabo en algún dispositivo que compara ambas señales (la entrada y la muestra de la salida) y produce una señal proporcional a la diferencia, que es la que se alimenta al amplificador. Esa diferencia se llama "error": diferencia entre entrada- salida, o mejor entrada-medida de la salida.



En el realimentado (closed loop) pues, la señal de comando no sale de una calibración sino de una comparación con la salida efectiva o real que tengo en cada instante.

Se ve que el diagrama block del sistema de control realimentado es el mismo esquema analizado en realimentación de circuitos.

Según el tipo de controlador, podremos tener diversos sistemas realimentados de control:
a) si-no (on-off).
El controlador meramente conecta o desconecta la alimentación de potencia a la salida, según los valores del "error". Ej: el calefón, control de temperatura por termostato.
b) controlador continuo.
Emplea la señal de error para controlar el output a través de una determinada función continua.
Desde otro punto de vista, el controlador puede ser:
un ser humano: sistema de control manual,
una máquina: " " " automático
Justamente, de la sustitución de un hombre por una máquina, viene el término de servomecanismo.

Para completar el cuadro, hay que prever las "perturbaciones", que son inputs adicionales en los distintos bloques del sistema: pueden ser externas o internas.

Ej: en el control de un avión, las turbulencias atmosféricas son perturbaciones externas; la falla de una componente electrónica del sistema es una perturbación interna (la mala regulación de una fuente, p.ej.)

Otros ejemplos de sistemas de control.
a) ya vimos el de temperatura. Otro: la temperatura del cuerpo humano.
La biología ofrece muchos ejemplos de procesos estables por realimentación negativa.
El metabolismo: proceso de conversión de alimentos en proteínas, carbohidratos y grasas con eliminación de calor, permite mantener el cuerpo a cerca de 37ºC aunque la temperatura exterior sea más baja.
Cuando la temperatura exterior sube, funcionan las glándulas sudoríparas y la piel se enfría por evaporación de la transpiración.

b) la economía es otra área que ofrece ejemplos de sistemas realimentados.
- la ley de oferta y demanda,
- las relaciones entre variables tales como índice de desempleo, inflación, tasas de interés, valores de las acciones en la Bolsa, etc.

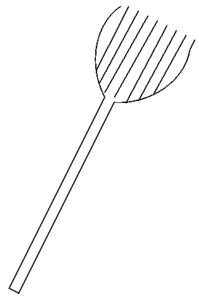
c) el control de tránsito: por semáforos, es open loop.
por agente, es realimentado.
En ambos casos, es on-off.
Puede ser por semáforos y realimentado, si se monitorea la cantidad de vehículos que se acercan por las diferentes vías.

d) una tostadora es un control open loop. Lo que se ajusta en rigor es un temporizador.

e) el andar en bicicleta (control de un sistema naturalmente inestable; realimentación negativa).
Estos ejemplos muestran la relación fundamental entre realimentación y estabilidad.
Ver por de pronto, que el sentido en que se aplica la señal de error puede producir inestabilidad (realimentación negativa o positiva). Caso del ciclista, del control de temperatura. Otras complicaciones surgen cuando hay retardos en las transferencias (delays): es el caso de la ducha cuando la cañería es larga.

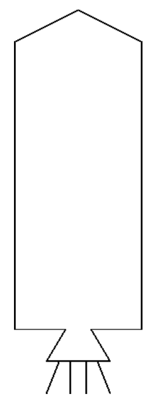
9. El caso de la escoba invertida.

Veamos con algún detalle el ejemplo del escobillero.
La escoba invertida, suponemos que solo se mueve en un plano.
El objetivo es mantenerla vertical, o por lo menos que no se caiga.

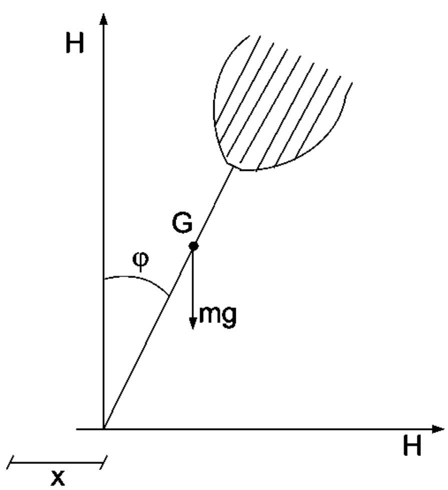


El sistema admite una posición de equilibrio (vertical) que sabemos es inestable: apartada de la misma caerá, a menos que se aplique una adecuada fuerza de control: U.
¿Cómo hacerlo estable? Trivialmente, sujetándola desde arriba.
La otra solución es sostenerla de abajo y mover adecuadamente.

El ejemplo puede parecer intrascendente; sin embargo tiene aplicación en cohetería: en el despegue de un cohete propulsado desde su base hay una posibilidad de caída, y se neutraliza aplicando propulsores horizontales secundarios.



Volviendo a la escoba: la variable a controlar es la desviación angular φ.



La fuerza de control U tiene una componente vertical V cuya
misión es mantener la mano a la misma altura, y una componente horizontal H encargada de evitar la caída.
Para plantear el modelo matemático, si L es la distancia del centro de gravedad de la escoba a su extremo; x la abscisa de la mano y V, H, las componentes de la fuerza de control:

Tomando momentos alrededor de G:

Equilibrio vertical:

Equilibrio horizontal:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = VL\operatorname{sen}\varphi - HL\cos\varphi \\ V - mg = m\dfrac{d^2}{dt^2}\left(L\cos\varphi\right) \\ H = m\dfrac{d^2}{dt^2}\left(x + L\operatorname{sen}\varphi\right) \end{cases}$$

Sustituyendo las derivadas segundas:

$$\frac{d}{dt}\cos\varphi = -\operatorname{sen}\varphi.\dot{\varphi} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\cos\varphi = -\cos\varphi.\dot{\varphi}^2 - \operatorname{sen}\varphi.\ddot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\varphi = \cos\varphi.\dot{\varphi} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi = -\operatorname{sen}\varphi.\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi.\ddot{\varphi}$$

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = VL\operatorname{sen}\varphi - HL\cos\varphi \\ V - mg = -mL\left(\cos\varphi.\dot{\varphi}^2 - \operatorname{sen}\varphi.\ddot{\varphi}\right) \\ H = m\ddot{x} + mL\left(\cos\varphi.\ddot{\varphi} - \operatorname{sen}\varphi.\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

Son 3 ecuaciones: hay 3 incógnitas: V, φ, x. H todavía no está especificado. Es la fuerza de control. Esto es un problema de diseño, no de análisis.
V es una fuerza de reacción; no interesa, se puede eliminar por sustitución.
La resolución de las ecuaciones diferenciales requerirá condiciones iniciales:
$\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$, $x(0)$, $\dot{x}(0)$.
Al decir que H no está especificado, estamos diciendo que este es un problema de síntesis, no de análisis.
No nos damos H a priori; lo vamos a elegir; es lo que se llama "estrategia del control".
La elección estará basada en la experiencia e intuición.

Antes de elegir H, observamos que las ecuaciones diferenciales son no-lineales.
En estos casos lo que se hace es:

a) simulación (computador analógico)
b) linealización.

Sigamos por b) Para pequeños ángulos φ, aproximamos: sen$\varphi \approx \varphi$ cos$\varphi \approx 1$

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = VL\varphi - HL \\ V - mg = -mL\left(\dot{\varphi}^2 + \varphi\ddot{\varphi}\right) \\ H = m\ddot{x} + mL\left(\ddot{\varphi} - \varphi\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

Paso siguiente: despreciamos los términos de "segundo orden" (repecto a φ)

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = VL\varphi - HL & \text{(No desprecio, pues H no lo elegí todavía)} \\ V - mg = 0 & \text{(Desprecio la aceleración vertical)} \\ H = m\ddot{x} + mL\ddot{\varphi} & \text{(Simplifico la aceleración horizontal:} \end{cases}$$

derivada 2ª de $L\operatorname{sen}\varphi \approx L\varphi$)

Eliminando V:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = mgL\varphi - HL \\ H = m\ddot{x} + mL\ddot{\varphi} \end{cases}$$

Ahora sí, tenemos que elegir H.
Reconocemos primero que es un control realimentado. El loop lo cierra el escobillero, que continuamente mide φ y varía la fuerza horizontal aplicada en consecuencia.
Se tiene entonces H = f(φ)
Hay que elegir f.
Lo más sencillo es que f sea lineal: $H = k_1\varphi$
Es el caso de los controles proporcionales.

En esa hipótesis:

$$(\alpha) \quad I\ddot{\varphi} + (k_1 L - mgL)\varphi = 0$$
$$k_1\varphi = m\ddot{x} + mL\ddot{\varphi}$$

Para φ: $I\ddot{\varphi} + (k_1 - mg)L\varphi = 0$

$$\ddot{\varphi} + \frac{(k_1 - mg)L}{I}\varphi = 0$$ O sea: $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, con

$$\omega^2 = \frac{(k_1 - mg)L}{I}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{k_1}{m}\varphi - L\ddot{\varphi} = a\varphi - b\ddot{\varphi}$$

1º) La solución para φ es independiente de x; la dinámica angular es independiente de la . traslación.
2º) Para completar la solución, supongamos condiciones iniciales: $\varphi(0) = \varphi_0$

$\dot{\varphi}(0) = x(0) = \dot{x}(0) = 0$

1er caso) Supongamos $\omega^2 > 0 \Rightarrow k_1 > k_{crítico} = mg$
Entonces: $\varphi = \varphi_0 \cos\omega t$

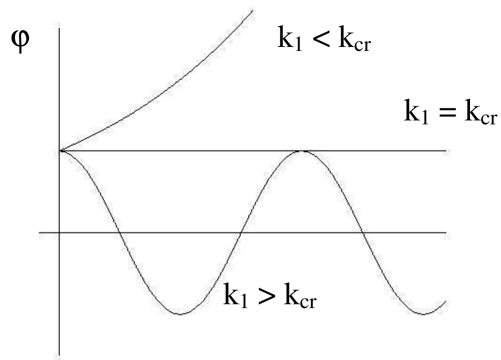
$$\ddot{x} = a\varphi_0\cos\omega t + b\omega^2\varphi_0\cos\omega t = (a + b^2)\varphi_0\cos\omega t$$

$$\dot{x} = \frac{(a + b\omega^2)\varphi_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t$$

$$x = \frac{\left(a + b\omega^2\right)\varphi_0}{\omega^2}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

Recordemos que supusimos $\omega^2 > 0 \Rightarrow k_1 > k_{critico} = mg$

En ese caso:



2º caso) $k_1 = k_{cr} = mg$

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = k = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0)$$

$$\ddot{x} = \frac{k_1}{m}\varphi_o = K \qquad \dot{x} = Kt \qquad x = \frac{Kt^2}{2}$$

3er caso) $k_1 < k_{cr}$, $\omega^2 < 0 \quad \omega^2 = -k^2$

$$\ddot{\varphi} - k^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = Ae^{kt} + Be^{kt}$$

$$\varphi(0) = A + B = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0) = k\left(A - B\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$$

$\varphi = A(e^{kt} + e^{-kt})$

φ crece, la escoba se cae.

Resultado: el control proporcional tiene éxito si la fuerza supera un cierto valor crítico.

Tampoco es brillante. Se pasa oscilando. Cuanto más cerca del valor crítico, más grandes son las oscilaciones de x.

¿Cómo mejorarlo?

Control PPD (Proportional Plus Derivative)

$H = k_1\varphi + k_2\dot{\varphi}$

Cualitativamente, la fuerza de control toma en cuenta no solo la posición sino su velocidad.

$\dot{\varphi}$ es una medida de cómo está variando φ.

En el sistema (α):

$$I\ddot{\varphi} + \left(k_1 L - mgL\right)\varphi + k_2 L\varphi = 0$$

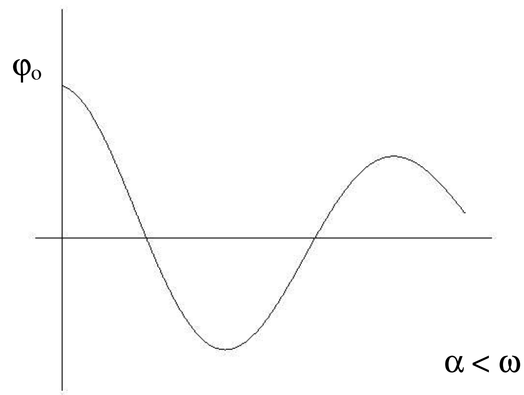
$$\ddot{\varphi} + 2\alpha\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$ en que el factor de amortiguación α es:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{k_2 L}{I}$$

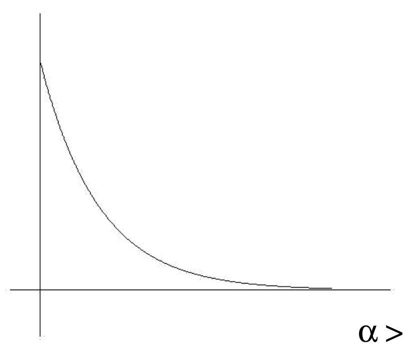
Ya sabemos que la solución puede ser amortiguada:

El denominador en Laplace es: $s^2 + 2\alpha s + \omega^2 = 0$

$(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2 = 0$, que se discute como siempre.



Y si el amortiguamiento es muy grande: $\alpha > \omega$, no hay oscilación.



Como control, se ve que el resultado es mucho mejor que en el proporcional.

10. Recapitulando.

Hemos iniciado este módulo precisando la idea de estabilidad de una transferencia mediante una definición. A partir de esta definición, hemos hallado criterios de equivalencia en el dominio del tiempo y en Laplace.
Luego encaramos el estudio de sistemas realimentados, analizando el diagrama de bloques de la configuración clásica. Ello nos permitió visualizar las virtudes (y limitaciones) de la realimentación negativa .
Observamos la correspondencia entre los cuatro posibles esquemas de realimentación y los cuatro tipos de amplificadores ideales básicos.
Dimos un primer vistazo a los sistemas de control, estudiando en detalle las posibles estrategias de control de un sistema elemental (la escoba invertida)