Unidad 10

Respuesta de régimen a una excitación periódica

Material de apoyo

Indice.

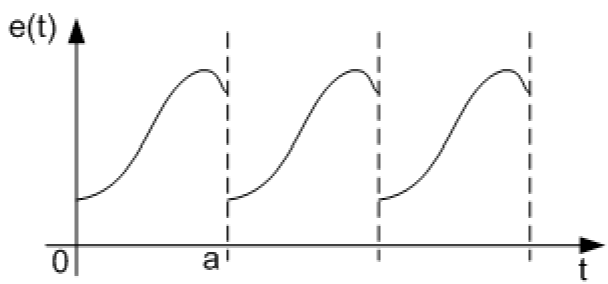
1. Introducción.
2. Planteo del problema.
3. Análisis por Fourier.
4. Análisis por Laplace.
5. La solución de régimen como función del tiempo.
6. Ejemplos.
7. Recapitulando

1. Introducción.

Ya hemos estudiado la respuesta de un sistema a una excitación sinusoidal.
Para ese caso, hemos desarrollado un método, llamado simbólico, que mediante el concepto del fasor, nos permite llegar rápidamente a la solución sinusoidal.
Observamos oportunamente que esa solución sinusoidal no es la solución completa, pero en la mayor parte de los casos reales, la diferencia entre ambas es transitoria.
En el presente módulo, trataremos de hacer algo parecido para el caso de excitación periódica no sinusoidal. Aceptando que los términos de respuesta propia son transitorios, trataremos de hallar la respuesta periódica de régimen.

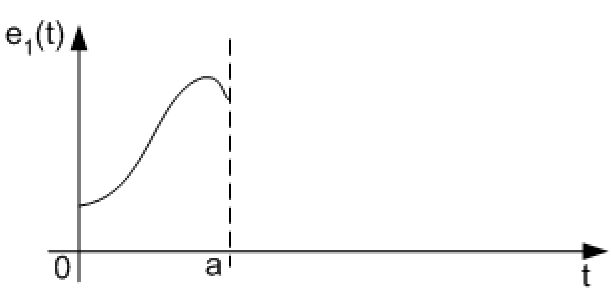
2. Planteo del problema.

Sea e(t) una función periódica, de periodo a. Llamemos $e_1(t)$ al primer ciclo.
Es decir: $e_1(t) = e(t),\ 0 \le t \le a$
$e_1(t) = 0 \quad , t > a$



$\rightarrow$ E(s)

$$E(s) = \frac{E_1(s)}{1 - e^{-as}}$$



$\rightarrow$ $E_1(s)$

$$E_1(s) = \int_0^a e(t)e^{-st}\,dt$$

La excitación e(t) se aplica a un circuito cuya transferencia es H(s).
Deseamos hallar, no la respuesta total, sino la respuesta en régimen (una vez extinguido el transitorio; si la respuesta propia es amortiguada). Suponemos por lo tanto que los polos propios están en el semiplano izquierdo.
Buscamos algo similar al método simbólico para régimen sinusoidal.

3. Análisis por Fourier.

Expresamos la excitación en Serie de Fourier: $e(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{jn\omega_o t}$, con

$$\omega_o = \frac{2\pi}{a}$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_0^a e(t)e^{-jn\omega_o t}\,dt ,$$

La salida periódica es: (α) $r_o(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n H(jn\omega_o)e^{jn\omega_o t}$ que podemos escribir:

$$b_n = \frac{1}{a}E_1(jn\omega_o)$$

Este camino permite calcular fundamental, armónicos, pero no da idea de la forma de onda.

4. Análisis por Laplace.

Veamos otra manera:
Supongamos que H(s) no tiene polos en el eje imaginario ni en el semiplano derecho.
Es decir, la respuesta propia es transitoria.

R(s) = E(S)H(s)

La respuesta completa es: $r(t) = L^{-1}\left[\frac{E_1(s)}{1-e^{-as}}H(s)\right] = \sum \mathrm{Re}\,s\left[\frac{E_1(s)H(s)}{1-e^{-as}}e^{st}\right]$

Para antitransformar, en general, tenemos una integral compleja que se calcula sumando residuos.

Veamos pues los polos de R(s).
1) Los polos de H(s) están en el semiplano izquierdo. Dan lugar a términos transitorios.
2) $E_1(s)$ decimos que no tiene polos.
Recordemos en efecto, que si f(t) es de soporte acotado, *L*[f(t) C.A. en todo el plano ⇒ $E_1(s)$ no tiene polos.

3) Nos quedan los ceros de $1-e^{-as}$

$$e^{-as} = 1 \Rightarrow as = j2\pi n \Rightarrow s = jn\omega_o,\ \text{con } \omega_o = \frac{2\pi}{a}$$

Hay pues infinitos polos (simples) en el eje imaginario.

Estos polos dan lugar -al antitransformar- a la respuesta de régimen.
Calculemos p.ej. el residuo de $R(s)e^{st}$ en $s = jn\omega_o$
Es:

$$\text{lím}_{s\to jn\omega}\left[(s-jn\omega_o)\frac{E_1(s)H(s)e^{st}}{1-e^{-as}}\right]=\frac{E_1(jn\omega_o)H(jn\omega_o)e^{jn\omega_o t}}{\frac{d}{ds}(1-e^{-as})\Big|_{s=jn\omega_o}}=\frac{E_1(jn\omega_o)H(jn\omega_o)e^{jn\omega_o t}}{a}$$

Sumando los residuos en estos polos, tenemos la parte de la respuesta debida a los polos de E(s), que es la parte de régimen:

$$r_o(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}E_1(jn\omega_o)H(jn\omega_o)e^{jn\omega_o t}$$

Y esto no es otra cosa que la Serie de Fourier que ya anunciamos (α), en que

$$b_n = \frac{1}{a}E_1(jn\omega_o)$$

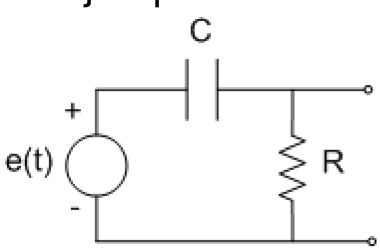
5. La solución de régimen como función del tiempo.

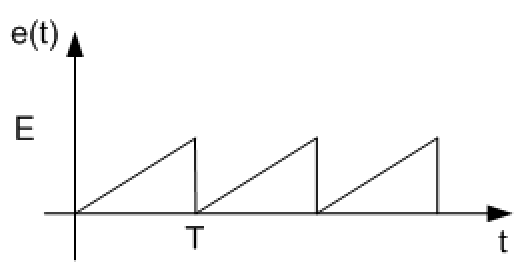
El desarrollo anterior nos sugiere otro camino para hallar la solución periódica (de régimen), calculamos la solución completa y le descontamos el transitorio (residuos de $R(s)e^{st}$ en los polos de H(s), con la ventaja de que los polos de H(s) son pocos).
Todavía, la gracia está en hacer esto en el primer periodo. Después, la respuesta forzada se repite con periodo a.

$$r_o(t) = \underbrace{L^{-1}[E(s)H(s)]}_{r_{Total}(t)} \; - \; \underbrace{\Sigma\,\text{Res}\left[\frac{E_1(s)H(s)}{1-e^{-as}}e^{st}\right]_{\text{polos de H(s)}}}_{r_{transitoria}(t)}$$

Más aun: $r_T(t)$ es la solución completa en el primer periodo. (r_o es periódica; la calculo en un período.
Pero en el primer periodo, la respuesta completa es la misma para $e_1(t)$ que para e(t), <u>o cualquier otra que coincida en el primer periodo.</u>
Poniendo $e_1(t)$ en lugar de de e(t), el circuito no se entera de la diferencia mientras sea $t < a$.
¿Cuál es la ventaja? La ventaja se sustenta en que $E_1(s)$ puede ser más simple que E(s).
En efecto: $E(s) = \dfrac{E_1(s)}{1-e^{-as}}$
La respuesta completa para el primer periodo es: $r(t) = L^{-1}[E_1(s)H(s)]$

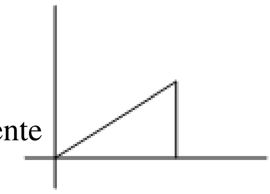
6. Ejemplos.



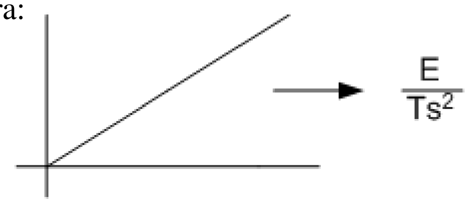


$$H(s) = \frac{V_2(s)}{E(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{RCs}{RCs+1} = \frac{s}{s+\frac{1}{\tau}}$$

H(s) tiene un polo simple en $s = -\frac{1}{\tau}$



<u>Solución completa</u> (en el primer periodo).
Entre 0 y T, el circuito no sabe qué pasará después de T.
Si buscamos la respuesta entre 0 y T, es lo mismo poner la fuente que poner esta otra:



$$R_T(s) = \frac{E}{Ts^2} \cdot \frac{s}{s+\frac{1}{\tau}} = \frac{E/T}{s(s+\frac{1}{\tau})} = \frac{\frac{\tau E}{T}}{s} - \frac{\frac{\tau E}{T}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$r_T(t) = \frac{\tau}{T} E Y(t)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

<u>Transitorio</u>:

$$r_t(t) = \text{Res}\left[\ \frac{E_1(s)H(s)}{1-e^{-Ts}} e^{st}\ \right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = lim\left(s+\frac{1}{\tau}\right)\left[\quad\right]\Big|_{s=-\frac{1}{\tau}} = lim\left[\frac{E_1(s)se^{st}}{1-e^{-Ts}}\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = (1)$$

Pero $\quad e_1(t) = \frac{YE}{T} t - Y(t-T)\frac{E}{T}(t-T) - Y(t-T)E$

$$E_1(s) = \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{E}{T} \cdot \frac{1}{s^2} e^{-Ts} - \frac{E}{s} e^{-Ts}$$

Luego: $\quad r_t(t) = (1) = \left[\frac{E}{T}\tau^2 - \frac{E}{T}\tau^2 e^{\frac{T}{\tau}} + E\tau e^{\frac{T}{\tau}}\right]\left(-\frac{1}{\tau}\right)\frac{e^{-t/\tau}}{1-e^{T/\tau}}$

$$r_t(t) = \left[\left(\frac{\tau}{T}-1\right)e^{T/\tau} - \frac{\tau}{T}\right] E \frac{e^{-t/\tau}}{1-e^{T/\tau}} = E\left[-\frac{e^{T/\tau}}{1-e^{T/\tau}} - \frac{\tau}{T}\right] e^{-t/\tau}$$

Permanente o periódica:

$$r_o(t) = r_T(t) - r_t(t) = \frac{\tau}{T} E\left[1 - e^{-t/\tau}\right] + E\left[\frac{e^{T/\tau}}{1-e^{T/\tau}} + \frac{\tau}{T}\right] e^{-t/\tau}$$

$$r_o(t) = \frac{\tau E}{T} + \frac{E e^{T/\tau}}{1-e^{T/\tau}} e^{-t/\tau} = \frac{\tau E}{T} - \frac{E}{1-e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau}$$

Veamos algunas verificaciones:

1º) ¿Cuánto salta?

En T^- $\quad r_o(T^-) = \dfrac{\tau E}{T} - \dfrac{Ee^{-T/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}$ (se puede ver que es > 0)

En T^+ $\quad r_o(T^+) = r_o(0) = \dfrac{\tau E}{T} - \dfrac{E}{1-e^{-T/\tau}}$ (se puede ver que es < 0)

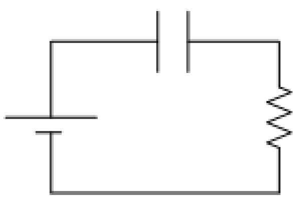
$r_o(T^+) - r_o(T^-) = E\dfrac{e^{-T/\tau}-1}{1-e^{-T/\tau}} = -E$ <u>Está bien</u>: Si la fuente salta E, el condensador debe pasar el salto; sino, si el condensador saltara, habría una δ de corriente, y la R no la puede soportar. Esta observación es general: *siempre que la entrada salta, el condensador transmite el salto.*

2º) ¿Cuál es el valor medio del voltaje?

$$\frac{1}{T}\int_0^T r_o(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\tau\frac{E}{T} - \frac{E}{1-e^{-T/\tau}}\right)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{\tau E}{T}t + \frac{E\tau}{1-e^{-T/\tau}}e^{-t/\tau}\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\tau E + \frac{\tau E e^{-T/\tau}}{1-e^{-T/\tau}} - \frac{\tau E}{1-e^{-T/\tau}}\right] = \frac{\tau E}{T}\left[\frac{1-e^{-T/\tau}+e^{-T/\tau}-1}{1-e^{-T/\tau}}\right] = 0!$$

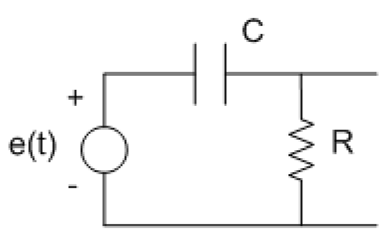
<u>Está bien</u>: sobre la resistencia no puede haber una componente de continua.
Analizando el circuito en <u>continua</u>:

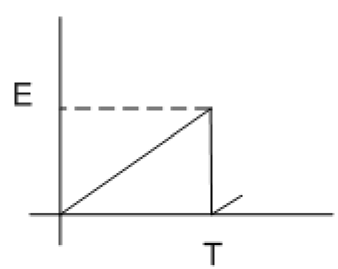


En <u>régimen</u>, el condensador se carga a E, y en la resistencia $V_R = 0$
Esta observación es general; cualquiera sea la excitación periódica podemos por Fourier superponerEn este caso, solo estudiamos el circuito de continua para sacar una conclusión.

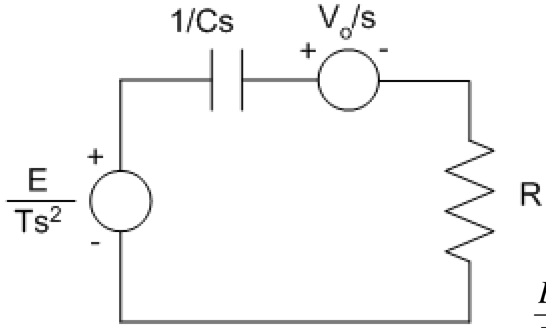
3º) Entre 0 y T, la evolución del voltaje en régimen es exponencial, con la constante de tiempo propia del circuito.

Veamos un método alternativo para resolver el mismo tipo de problema.





Sea V_o el voltaje inicial del condensador. En régimen, no sabemos cuál será su valor. Pero sabemos que se repetirá periódicamente. Nos ubicamos bien lejos en el tiempo, y analizamos un ciclo en régimen.-



$$\frac{E}{T}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{V_o}{s}=\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I=\frac{(RCs+1)}{Cs}I$$

$$I=\frac{\left(\frac{E}{T}-V_o s\right)Cs}{s^2(RCs+1)}=\frac{\left(\frac{E}{T}-V_o s\right)\frac{1}{R}}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}=\frac{\frac{\tau E}{T}\cdot\frac{1}{R}}{s}+\frac{-\frac{\tau E}{TR}-\frac{V_o}{R}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

(1) $V_{out} = RI = \frac{\tau E}{T}-\left(V_o+\frac{\tau E}{T}\right)e^{-t/\tau}$ (V_{out} para no confundir con V_o)

En t = T, baja E

$$V_{out}(T^+) = \frac{\tau E}{T}-\left(V_o+\frac{\tau E}{T}\right)e^{-T/\tau}-E$$

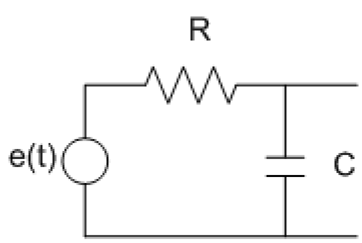
Esto debe coincidir con $V_{out}(0^+) = \frac{\tau E}{T}-V_o-\frac{\tau E}{T}=\frac{\tau E}{T}-V_o e^{-T/\tau}-\frac{\tau E}{T}e^{-T/\tau}-E$

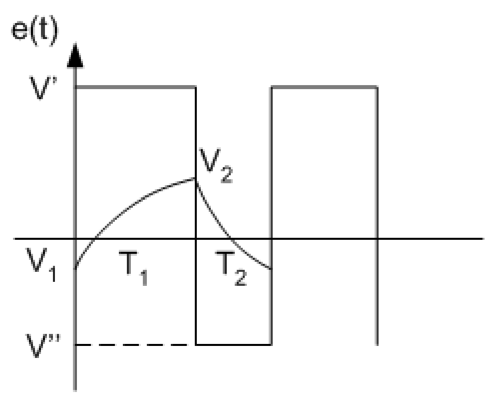
$$\frac{\tau E}{T}e^{-T/\tau}+E-\frac{\tau E}{T}=V_o\left(1-e^{-T/\tau}\right)\Rightarrow V_o=\frac{E}{1-e^{-T/\tau}}-\frac{\tau E}{T}$$

Sustituyendo en (1):

$$V_{out}=\frac{\tau E}{T}-\frac{Ee^{-t/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}$$

Veamos el uso de estas observaciones para resolver otro caso:





Aplicando el Teorema General, verlo como ejercicio.
Con los razonamientos vistos:

Dibujamos provisoriamente la salida.
Tramo T_1: C se carga exponencialmente (con cte de tiempo τ=RC) hacia V´. No salta.
En T_2 se descarga a V´´ y debe llegar a V_1
¿Cómo escribimos esa variación exponencial?

$V_o = A + Be^{-t/\tau*}$
$V_i = A + B$
$V_f = A \qquad V_o = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau}$

Si parte de V_1, $\qquad v_{o1} = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau} = V' + (V_1 - V')e^{-t/\tau}$
La bajada (parte de V_2) será:

$$v_{o2} = V'' + (V_2 - V'')e^{-(t-T)/\tau} \leftarrow \text{ Ojo}$$

V_1 y V_2 los obtenemos de escribir: $\qquad v_{o1}(T_1) = V_2$
$\qquad v_{o2}(T_1+T_2) = V_1$

Para simplificar los cálculos, sea: $\quad V' = E$
$V'' = 0$
$T_1 = T_2 = T$

$v_{o1} = E + (V_1 - E)e^{-t/\tau}$
$v_{o2} = V_2 e^{-(t-T)/\tau}$

(1) $v_{o1}(T_1) = E + (V_1 - E)e^{-T/\tau}$
(2) $v_{o2}(T_1+T_2) = V_2 e^{-T/\tau} = V_1$
Entonces, sustituyendo V_1 de (2) en (1):

$$E + V_2 e^{-2T/\tau} - Ee^{-T/\tau} = V_2 \Rightarrow V_2 = E\frac{1-e^{-T/\tau}}{1-e^{-2T/\tau}} = E\frac{1}{1+e^{-T/\tau}}$$

$$V_1 = V_2 e^{-T/\tau}$$

7. Recapitulando

Para hallar la respuesta de régimen a una excitación periódica, suponiendo que la respuesta propia es transitoria, hemos planteado dos caminos:
Por Fourier, que esencialmente aplica el método simbólico a cada componente de la excitación;
Por Laplace, que es coherente con el anterior, pero además conduce a una forma de llegar a la forma de onda de la respuesta de régimen.
El análisis de un ejemplo nos permitió aplicar esos caminos y mostrar un tercer enfoque, situándose en un tiempo suficientemente avanzado como para que el transitorio se haya extinguido.