Soluciones práctico 6 - Electrotécnica 2
Aplicaciones de máquinas de inducción

Problema 1

Inicialmente se analizará la caída de tensión que se da en $TREF$ (y por tanto en TOF) en el momento del arranque de los cuatro motores. Calculemos inicialmente la impedancia del cable trifásico que alimenta $TREF$ desde TG:

$$\overline{Z_c} = (0{,}707 + 0{,}147j) * 0{,}045 = 31{,}8 + 6{,}6j \ \ [m\Omega]$$

Dado que no se cuenta con ensayos del motor que permitan calcular el modelo estrella equivalente del mismo, se utilizan los datos que se tienen disponibles en el catálogo del fabricante. Del catálogo adjunto, para el motor W21, Eficiencia Estándar, cuatro polos, $10HP$ obtenemos los siguientes datos:

- $I_{nom} = 15{,}58A$ (corriente nominal)
- $I_p/I_n = 6{,}7$ (cociente corriente de rotor bloqueado/corriente nominal)
- $C_n = 48{,}27N.m$ (par nominal)
- $C_p/C_n = 2{,}1$ (cociente par con rotor bloqueado/par nominal)

Si bien no se da el factor de potencia en el arranque como un dato en el catálogo, lo suponemos como 0,55. La corriente de arranque de cada motor en base a los datos del catálogo resulta:

$$|I_{arr}| = 6{,}7 * 15{,}58A = 104{,}39A$$

Dado que el dato de corriente de arranque se da en el catálogo para tensión de $380V$ (que asumimos como válidos a $400V$) podemos calcular la impedancia equivalente del motor en el arranque:

$$\overline{Z}_{motor \ \ arr} = \frac{(400/\sqrt{3})}{104{,}39} \angle arcos(0{,}55) = 2{,}21\angle 56{,}6^{o}\Omega$$

Dado que en el arranque itervienen los cuatro motores, la impedancia equivalente será el paralelo de las cuatro impedancias (los motores están conectados de la misma barra), que por tratarse de cuatro impedancias iguales resulta ser un cuarto de la misma:

$$\overline{Z}_{motor \ \ arr \ \ eq} = \frac{\overline{Z}_{motor \ \ arr}}{4} = 0{,}55\angle 56{,}6^{o}\Omega$$

Para completar el cálculo de la caída de tensión en $TREF$ falta calcular la corriente que toma la carga de TOF. De los datos del ensayo realizado se obtiene la impedancia de esta carga:

$$\overline{Z}_{oficinas} = \frac{(395/\sqrt{3})}{20} \angle arcos(0{,}85) = 11{,}40\angle 31{,}8^{o}\Omega$$

Finalmente, la impedancia total conectada en el tablero $TREF$ en el momento del arranque de los cuatro motores resulta ser:

$$\overline{Z}_{TREF} = \overline{Z}_{motor \ \ arr \ \ eq}//\overline{Z}_{oficinas} = 0{,}30 + 0{,}43j\Omega$$

Haciendo un divisor de tensión entre esta impedancia y la del cable que conecta TG con $TREF$ obtenemos la tensión en barras de $TREF$:

$$\overline{V}_{TREF} = \frac{400V\angle 0^{o}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\overline{Z}_{TREF}}{\overline{Z}_{TREF} + \overline{Z_c}} \right) = 220{,}8\angle 2{,}3^{o}V$$

Lo que en tensión compuesta representa:

$$|\overline{U}_{TREF}| = 220{,}8 * \sqrt{3} = 382{,}4V$$

La caída de tensión porcentual respecto a la tensión nominal ($400V$) resulta:

$$\Delta U = \frac{400 - 382{,}4}{400} * 100\,\% = \boxed{4{,}4\,\%}$$

Se observa entonces que en el instante que arrancan los cuatro motores la caída de tensión en el tablero de oficinas es mayor al 3 % admisible para las cargas de iluminación. Se analizarán a continuación las tres acciones correctivas propuestas, evaluando si son viables.

- **Solución 1:** Instalar un autotransformador que reduzca la tensión a la mitad permite reducir en un factor de cuatro la corriente de carga del motor, o expresándolo de otra manera, se multiplica por cuatro la impedancia equivalente del motor en el arranque. Esto se demuestra de la siguiente forma:

  Sea el modelo monofásico estrella del autotransformador trifásico (ver figura 1), donde $\overline{Z}$ representa una impedancia de carga en el secundario.

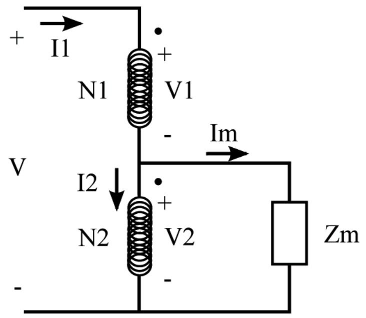

Figura 1: Autotransformador.

  Aplicando las ecuaciones del transformador ideal:

$$\frac{\overline{V}_1}{N_1} = \frac{\overline{V}_2}{N_2}$$
$$\overline{I}_1 N_1 + \overline{I}_2 N_2 = 0$$

  Por otro lado se cumple la malla y el nudo:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 = \overline{V}$$
$$\overline{I}_1 = \overline{I}_2 + \overline{I}_m$$

  Despejando la tensión en el secundario del transformador:

$$\frac{\overline{V}_2 N_1}{N_2} + \overline{V}_2 = \overline{V} \Rightarrow \overline{V}_2 = \overline{V}\frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

  Evaluando la ecuación de las corrientes y el nudo:

$$\overline{I}_m = \overline{I}_1 - \overline{I}_2 = \overline{I}_1 + \frac{\overline{I}_1 N_1}{N_2} = \overline{I}_1\frac{N_1 + N_2}{N_2}$$

  Vemos entonces que la tensión sobre la carga ($\overline{V}_2$) se multiplicó por $\dfrac{N_2}{N_1 + N_2}$ con respecto a la tensión de la fuente ($\overline{V}$), mientras que la corriente que consume la carga ($\overline{I}_m$) se dividió por el mismo factor respecto a la corriente de la fuente ($\overline{I}_1$).

  Con esto demostramos que un autotransformador de relación de vueltas cualquiera modifica la tensión y la corriente en relación inversa. Ahora volviendo al ejemplo del ejercicio, ¿por qué baja la cuatro veces la corriente consumida, si la tensión a la carga baja la mitad?. La respuesta es que el motor presenta una impedancia constante, si la misma se conecta directo a la red la corriente resulta:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}}$$

Si se conecta a través del autotrasformador entonces la corriente en el secundario es:

$$\overline{I}_m = \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}}$$

Por lo tanto la corriente en el primario vale:

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_m \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{\overline{V}_2}{\overline{\overline{Z}}} \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}} \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right)^2$$

Se observa entonces que la corriente que toma una impedancia dada desde la fuente se reduce al cuadrado con la relación que se reduce la tensión. Si la reducción de la tensión es a la mitad significa que $N_1 = N_2$ por lo que resulta que:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\overline{V}}{4.\overline{\overline{Z}}}$$

Vemos que la impedancia vista desde el primario del autotransformador es cuatro veces mayor que antes:

$$\overline{Z}_{vista} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}_1} = 4.\overline{Z}$$

Rehaciendo los cálculos si se arrancan los cuatro motores alimentados de un autotransformador que reduzca a la mitad la tensión se obtiene:

$$\overline{Z}_{motor\ \ arr\ \ eq\ \ autotr} = 4.\overline{Z}_{motor\ \ arr\ \ eq} = 2{,}20\angle 56{,}6^{o}\Omega$$

$$\overline{Z}_{motor\ \ arr\ \ eq\ \ autotr} // \overline{Z}_{oficinas} = 1{,}87\angle 52{,}7^{o}\Omega$$

$$\overline{V}_{TREF} = \frac{400V\angle 0^{o}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\overline{Z}_{TREF}}{\overline{Z}_{TREF} + \overline{Z}_c} \right) = 227{,}9\angle 0{,}6^{o}V$$

$$|\overline{U}_{TREF}| = 227{,}9 * \sqrt{3} = 394{,}8V$$

$$\Delta U = \frac{400 - 394{,}8}{400} * 100\,\% = \boxed{1{,}3\,\%}$$

Con esta solución se logra bajar la caída de tensión a límites admisibles. Ahora bien, la reducción de la corriente que se logra por arranque con el autotransformador trae aparejada una reducción del par de arranque, también en un factor de cuatro (recordar que para un motor dado, el par varía con el cuadrado de la tensión). Debe verificarse que esta reducción sea tal que aún permita que los motores puedan vencer el par resistente en el arranque.

De los datos del catálogo, el par de arranque es (a tensión nominal):

$$C_{arr} = 2{,}1 * 48{,}27N.m = 101{,}36N.m$$

El par de arranque a mitad de tensión se reduce a una cuarta parte:

$$\boxed{C_{arr\ \ autotr} = 25{,}34N.m < 45N.m = C_{arr\ \ carga}}$$

Con lo que no puede vencer el par resistente que ofrece en el arranque la carga mecánica. Se concluye que la solución de instalar el autotransformador para el arranque de los motores si bien solucionaría la caída de tensión, no es viable dado que el par se reduce demasiado para las solicitaciones mecánicas de la carga.

- **Solución 2:** Colocar elementos de temporización para "escalonar" el arranque de los motores. En este caso se daría cada arranque cuando se tiene a los motores que arrancaron antes tomando la corriente nominal, con lo que se evitaría la suma de los picos de corriente de arranque de todos los motores.

  Paralelamente al arranque de los motores está conectada la carga de oficinas así que el primer motor en arrancar sumará su pico a la corriente de TOF. El segundo motor que arranque sumará su corriente a la nominal del primer motor (que ya arrancó) más la corriente de TOF, y así sucesivamente. Se puede ver que el peor caso se dará cuando arranque el cuarto motor, ya que su pico se sumará a la corriente nominal de los otros tres, más la corriente de TOF, de tal forma que calcularemos la caída de tensión solo en este caso.

  La impedancia equivalente en el momento del arranque del cuarto motor resulta del paralelo de tres impedancias a potencia nominal (de los tres motores que ya arrancaron) con la impedancia de arranque del motor que está arrancando, en paralelo con la carga de oficinas.

  Calculemos la impedancia de un motor a corriente nominal:

$$\overline{Z}_{motor\ \ nom} = \frac{(400/\sqrt{3})}{15{,}58} \angle arcos(0{,}84) = 14{,}82\angle 32{,}9^{o}\Omega$$

  El dato del factor de potencia con carga nominal se encuentra en el catálogo del motor.

  Entonces en el momento del arranque del cuarto motor se tiene la siguiente impedancia equivalente en el tablero $TREF$:

$$\overline{Z}_{TREF} = \frac{\overline{Z}_{motor\ \ nom}}{3} // \overline{Z}_{motor\ \ arr} // \overline{Z}_{oficinas} = 0{,}93 + 1{,}01j\Omega$$

  Por lo tanto la caída de tensión, repitiendo los cálculos anteriores resulta:

$$\overline{V}_{TREF} = \frac{400V\angle 0^{o}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\overline{Z}_{TREF}}{\overline{Z}_{TREF} + \overline{Z}_{c}} \right) = 226{,}5\angle 0{,}8^{o}V$$

$$|\overline{U}_{TREF}| = 226{,}5 * \sqrt{3} = 392{,}4V$$

$$\Delta U = \frac{400 - 392{,}4}{400} * 100\,\% = \boxed{1{,}9\,\%}$$

  Se observa que con los motores arrancando de a uno, en el peor caso que es cuando arranca el último, aún se mantienen niveles admisibles de caída de tensión. Esta solución resulta viable para resolver el problema analizado.

- **Solución 3:** Modificar la arquitectura de la instalación eléctrica, eliminando la alimentación de TOF desde $TREF$ y haciéndola directamente desde TG (separando de esta forma la fuerza motriz de las cargas de ilunimación y tomas). Esta solución resuelve el problema de manera radical, ya que ahora el tablero TOF siempre está alimentado desde TG, resultando insensible a las eventuales caídas de tensión producidas por los motores. Cabe señalar que esta solución puede resultar más costosa que la anterior por tener que colocar conductor nuevo (otro cable trifásico paralelo al ya instalado, 45m). Si bien la carga no es mucha ($20A$) dado que la longitud del cable es importante, probablemente se tenga que sobredimensionar para asegurar una caída de tensión aceptable.

Problema 2

a) $X_o = 42,34\Omega$, $R_1 + R_{2e} = 0,89\Omega$, $R_1 = 0,5\Omega$, $R_{2e} = 0,4\Omega$, $X_1 + X_{2e} = 2,42\Omega$, $X_C = 1\Omega$.

b) Con un arranque estrella triángulo tendría una corriente de $15,3A$ en el arranque, que es mayor a la corriente limite de $10A$, por lo tanto no puedo usar un arranque estrella triángulo.

c) En arranque directo $X_{ad}@50Hz = 10,27\Omega$ por fase en Y.

d) $U_M = 219,2V$.

Problema 3

a) El grupo de conexión debe ser Δ/Y.

b) $X_0 = 15,2\Omega$, $R_1 + R_{2e} = 0,237\Omega$, $R_1 = 0,123\Omega$, $R_{2e} = 0,114\Omega$, $X_1 + X_{2e} = 0,667\Omega$, $X_T = 0,0718\Omega$, $Z_C = 1,016 + j0,762\Omega$ modelo serie.

c) Sin usar el mpd $K = 5,69x10^{-2} rpm/Nm$, usando el mpd se obtiene $K = 6,36x10^{-2} rpm/Nm$.

d) $U_{Z_C} = 203,9V$.

Problema 4

Parte A)

Las pérdidas de vacío están dadas por:

$$P_0 = K_1 f B_{max}^2 + K_2 f^2 B_{max}^2 \propto (K_1 f + K_2 f^2)\phi^2$$

Se sabe además que:

$U \propto Kf\phi \Rightarrow U \propto f\phi$, de donde:

$$\phi_{380v,60Hz} \propto \frac{380v}{60Hz} = 6{,}33$$
$$\phi_{200v,50Hz} \propto \frac{220v}{50Hz} = 4{,}4$$

Entonces el flujo a $220V$, $50Hz$ es menor que el flujo a $380V$, $60Hz$. Como disminuye el flujo y disminuye la frecuencia se tiene que las pérdidas de vacío disminuyen. Las pérdidas de vacío serán despreciables.

A $380V$, $60Hz$ el par y la velocidad de sincronismo son mayores que a $220V$, $50Hz$ por lo tanto el motor funcionará a menor velocidad en la red de $220V$, $50Hz$. Las pérdidas mecánicas serán despreciables.

Parte B)

Ensayo Vacío:

Los datos del ensayo de vacío son: $60Hz$, $380V$, $2{,}3A$ y $P \cong 0$.
Como $P \cong 0 \Longrightarrow R_0 = 0$
Para calcular X_0 hacemos:

$S = Q = \sqrt{3}UI = \sqrt{3}(380V)(2{,}3A) = 1513{,}8VAR$

$Q = \sqrt{3}UI = \sqrt{3}U\frac{U}{X_0} \Longrightarrow X_0 = \frac{U^2}{Q} = \frac{(380V)^2}{1513{,}8VAR} = 95{,}38\Omega$

$$\boxed{R_0 = 0}$$

$$\boxed{X_0 = 95{,}38\Omega}$$

Ensayo a rotor bloqueado:

Los datos del ensayo a rotor bloqueado son: $60Hz$, $100V$, $6{,}5A$ y $P = 600W$.
$|S| = \sqrt{3}|U||I| = \sqrt{3}(100V)(6{,}5A) = 1125{,}8VA$
Sabemos que $P = 600W$ y por lo tanto se obtiene $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 952{,}6VAR$
La potencia activa disipada en el ensayo a rotor bloqueado será $P = 3(R_1 + R_{2e})I_{2e}^2$ (Observar que $g = 1$ por ser rotor bloqueado). La potencia reactiva consumida en el ensayo está dada por $Q = 3(X_1 + X_{2e})I_{2e}^2$, por lo tanto:

$$R_1 + R_{2e} = \frac{P}{3I_{2e}^2} = \frac{600W}{3(6{,}5A)^2} = 4{,}73\Omega$$

Se sabe además que la resistencia de estator por fase es $R_1 = 2{,}5\Omega$ por lo tanto:

$$R_{2e} = 2{,}23\Omega$$

$$X_1 + X_{2e} = \frac{Q}{3I_{2e}^2} = \frac{952{,}6VAR}{3(6{,}5A)^2} = 7{,}51\Omega$$

$$\boxed{R_1 = 2{,}5\Omega}$$

$$\boxed{R_{2e} = 2{,}23\Omega}$$

$$\boxed{(X_1 + X_{2e}) = 7{,}51\Omega}$$

Cuando pasamos el modelo a $50Hz$ se deben corregir las admitancias:

$$X_{0@50Hz} = \frac{50}{60}95{,}38\Omega = 79{,}48\Omega$$

$$(X_1 + X_{2e})_{@50Hz} = \frac{50}{60}7{,}51\Omega = 6{,}26\Omega$$

En las Figuras 2 y 3 se observan los modelos del MI para $60Hz$ y $50Hz$ respectivamente.

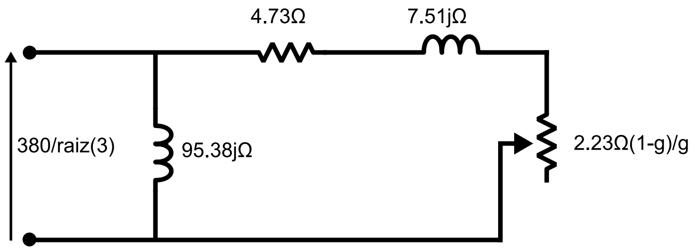

Figura 2: Solución problema **??**

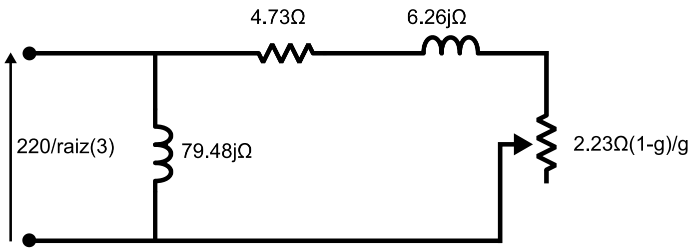

Figura 3: Solución problema **??**

Parte C)

En condiciones nominales $g_n = 0{,}0311$ y el calentamiento es 40º sobre la temperatura ambiente. Las pérdidas joule están dadas por:

$$P_{perdidas_Joule} = 3(R_1 + R_{2e})I_{2e}^2 = \frac{(R_1 + R_{2e})U^2}{(R_1 + \frac{R_{2e}}{g_n})^2 + (X_1 + X_{2e})^2}$$

$$P_{perdidas_Joule} = \frac{(4{,}73)380V}{(2{,}5 + \frac{2{,}23}{0{,}0311})^2 + (7{,}51)^2} = 122{,}7W$$

Por otro lado se tiene que:

$$P_{Perdidas} = K\Delta T = K(40^o) = 122{,}7W \Rightarrow K = \frac{122{,}7W}{40^o} = 3{,}07\frac{W}{^oC}$$

Sabiendo que la $T_{amb}^{max} = 40^o$ y que la $T_{admitida}^{max} = 90^o$ se tiene que: $\Delta T^{max} = 50^o$

$$P_{perdidas_Joule@220v,50Hz}^{max} = K\Delta T^{max} = (3{,}07W/^oC)(50^oC) = 153{,}5W$$

Por otro lado:

$$P^{max}_{perdidas_Joule@220v,50Hz} = \frac{(R_1 + R_{2e})U^2}{(R_1 + \frac{R_{2e}}{g_{max}})^2 + (X_1 + X_{2e})^2_{@50Hz}} = 153{,}5W$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos valores para g_{max}:

- $g_{max} = 0{,}062$ (Valor válido)
- $g_{max} = -0{,}055$

Luego la máxima potencia mecánica será la disipada en $\frac{R_{2e}(1-g)}{g}$, es decir:

$$P^{max}_{M@220v,50Hz} = 3\frac{R_{2e}(1-g)}{g} I^2_{2e}$$

Sabemos que:

$$P^{max}_{perdidas_Joule@220v,50Hz} = 3(R_1 + R_{2e})I^2_{2e} = 153{,}5W$$

De donde se deduce que:

$$I^2_{2e} = \frac{153{,}5W}{3(R_1 + R_{2e})} = 10{,}8A^2$$

Por lo tanto:

$$P^{max}_{M@220v,50Hz} = 3\frac{R_{2e}(1-g)}{g} I^2_{2e} = \frac{3(2{,}23\Omega)(1-0{,}062)}{0{,}062} 10{,}8A^2 = 1093W$$

$$\boxed{P^{max}_{M@220v,50Hz} = 1093W}$$

Con una fuente de $380V$ **y** $60Hz$ **se tiene:**

$$P^{max}_{perdidas_Joule@380v,60Hz} = K\Delta T^{max} = (3{,}07W/^oC)(50^oC) = 153{,}5W$$

$$P^{max}_{perdidas_Joule@380v,60Hz} = \frac{(R_1 + R_{2e})U^2}{(R_1 + \frac{R_{2e}}{g_{max}})^2 + (X_1 + X_{2e})^2_{@60Hz}} = 153{,}5W$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos valores para g_{max}:

- $g_{max} = 0{,}035$ (Valor válido)
- $g_{max} = -0{,}032$

Sabemos que:

$$I^2_{2e} = \frac{153{,}5W}{3(R_1 + R_{2e})} = 10{,}8A^2$$

$$P^{max}_{M@380v,60Hz} = 3\frac{R_{2e}(1-g)}{g} I^2_{2e} = \frac{3(2{,}23\Omega)(1-0{,}035)}{0{,}035} 10{,}8A^2 = 1996{,}5W$$

$$\boxed{P^{max}_{M@380v,60Hz} = 1996{,}5W}$$

Parte D)

Las nuevas condiciones implicarán un $\Delta T^{max} = 30^o \Rightarrow P_{Joule} = 90W \Rightarrow I_{2e} = 2{,}52A$.
La corriente tomada por el motor aumenta al disminuir la tensión de alimentación, esta no debe superar la corriente que da las pérdidas máximas aún con la menor tensión.

$$I_{2e} = \frac{\frac{(0,8)U}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(R_1 + \frac{R_{2e}}{g})^2 + (X_1 + X_{2e})^2}} = \frac{\frac{(0,8)220}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(2,5 + \frac{2,23}{g})^2 + 2,26^2}} = 2,52$$

$$g = 5,9\,\% = 0,059$$

Entonces:

$$P_M = 3R_{2e}\frac{1-g}{g}I_{2e}^2 = 3(2,23)\frac{1-0,059}{0,059}2,52^2 = 678W$$

$$\boxed{P_M = 678W}$$

Problema 5