Examen 19/02/2018

Problema 2 (solución)

1. Modelo

Segunda ley de Newton aplicada al barco:

$$F\cos\phi - b\left(\dot{x} - V_A\cos\alpha\right) = m\ddot{x} \quad ,$$

$$F\sin\phi - b\left(\dot{y} - V_A\sin\alpha\right) = m\ddot{y} \quad .$$

Representación en variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x},\mathbf{u}\right) \quad ,$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad ;$$

donde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F & \phi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{x} & y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x} & y & \dot{y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\mathbf{u}\right) = \begin{bmatrix} \frac{F\cos\phi - b(\dot{x} - V_A\cos\alpha)}{m} \\ \dot{y} \\ \frac{F\sin\phi - b(\dot{y} - V_A\sin\alpha)}{m} \end{bmatrix} \quad .$$

2. Trayectoria de referencia

Sea $\mathbf{y_0}(t) = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y_0}(t)$; entonces $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x_0}(t) = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u_0} = \begin{bmatrix} F_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$, donde F_0 y ϕ_0 son constantes tales que:

$$F_0\cos\phi_0 = b\left(V - V_A\cos\alpha\right) \quad ,$$

$$F_0\sin\phi_0 = -bV_A\sin\alpha \quad ;$$

$$F_0 = b\sqrt{\left(V - V_A\cos\alpha\right)^2 + V_A^2\sin^2\alpha} \quad ,$$

$$\tan\phi_0 = \frac{-V_A\sin\alpha}{V - V_A\cos\alpha} \quad .$$

3. Modelo linealizado en torno a la trayectoria de referencia

Sea $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u_0}$, $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y_0}(t)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x_0}(t)$. El modelo linealizado es:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} \quad ,$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} \quad ;$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\phi_0}{m} & \frac{-F_0 \sin\phi_0}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{\sin\phi_0}{m} & \frac{F_0\cos\phi_0}{m} \end{bmatrix} \quad .$$

Matriz de transferencia:

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} = \frac{\frac{1}{m}}{s\left(s + \frac{b}{m}\right)} \begin{bmatrix} (\cos\phi_0)\, s & (-F_0\sin\phi_0)\, s \\ \sin\phi_0 & F_0\cos\phi_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\frac{b}{m}}{s\left(s + \frac{b}{m}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\cos\phi_0}{b} s & \frac{-F_0\sin\phi_0}{b} s \\ \frac{\sin\phi_0}{b} & \frac{F_0\cos\phi_0}{b} \end{bmatrix} \quad .$$

El sistema es inestable porque hay elementos de la matriz de transferencia con polos en $s = 0$. Para que el sistema fuera estable, todos sus polos deberían tener parte real negativa.

4. Control

4.1. Transmitancia muestreada

Sean $\tilde{y} = y - 0$, $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ y

$$H(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\phi}}(s) = \left(\frac{F_0\cos\phi_0}{b}\right)\frac{\frac{b}{m}}{s\left(s + \frac{b}{m}\right)} = (V - V_A\cos\alpha)\frac{\frac{b}{m}}{s\left(s + \frac{b}{m}\right)} \quad .$$

Sea

$$\bar{H}(z) = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}_{t=kT}\right\} =$$

$$= (V - V_A\cos\alpha)\frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{b}{m}}{s^2\left(s + \frac{b}{m}\right)}\right\}_{t=kT}\right\} = (V - V_A\cos\alpha)\frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad ;$$

donde:

$$b_1 = \frac{1}{a}\left(aT - 1 + \exp\left(-aT\right)\right) \quad ,$$

$$b_2 = \frac{1}{a}\left(1 - \exp\left(-aT\right) - aT\exp\left(-aT\right)\right) \quad ,$$

$$a_1 = -\left(1 + \exp\left(-aT\right)\right) \quad ,$$
$$a_2 = \exp\left(-aT\right) \quad ,$$
$$a = b/m \quad .$$

Entonces:

$$\bar{H}(z) = \frac{c\left(b_1 z + b_2\right)}{\left(z-1\right)\left(z-a_2\right)} \quad ;$$

donde

$$c = \left(V - V_A \cos\alpha\right) = 10 \quad , \quad a_2 = \exp\left(-aT\right) = 0,5 \quad ,$$
$$b1 = \frac{1}{2a}\left(\ln 4 - 1\right) = 50\left(\ln 4 - 1\right) \approx 19,31 \quad ,$$
$$b2 = \frac{1}{2a}\left(1 - \ln 2\right) = 50\left(1 - \ln 2\right) \approx 15,34 \quad .$$

4.2. Error en régimen estacionario

$\bar{H}(z)$ tiene un polo en $z = 1$, así que si $C(z)$ no tiene ceros en $z = 1$ que cancelen este polo, el sistema realimentado es de tipo 1. Si además el sistema realimentado es estable; entonces el mismo tiene error en régimen nulo ante una perturbación escalón, tal como se requiere.

Más detalladamente, la función de transferencia desde la perturbación p_k al error $e_k = r_k - y_k$ es:

$$F(z) = \frac{-1}{1 + C(z)\bar{H}(z)} \quad .$$

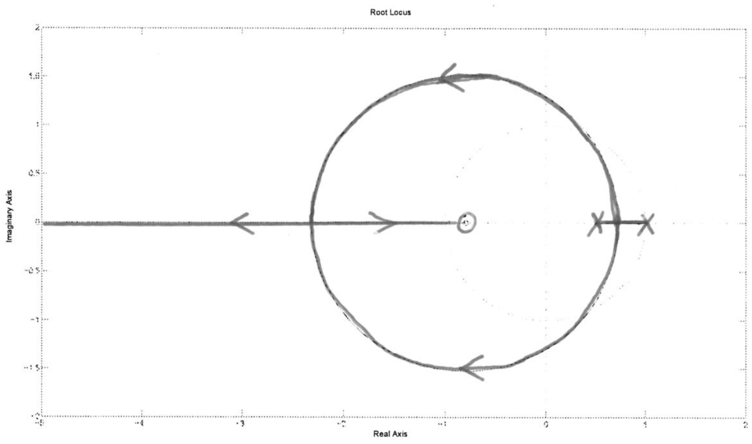
Ante una perturbación escalón unitario, $P(z) = \mathscr{Z}\left\{p_k\right\} = \frac{z}{z-1}$, el error en régimen estacionario es:

$$\lim_{k\to+\infty} e_k = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)P(z) \quad ,$$

si $(z-1)F(z)P(z)$ tiene todos sus polos dentro del círculo de radio uno y centro en el origen del plano complejo; es decir, si las raíces de $1 + C(z)\bar{H}(z)$ (que son los polos de lazo cerrado) están dentro del mismo círculo. En estas condiciones:

$$\lim_{k\to+\infty} e_k = \lim_{z\to 1} F(z) = \lim_{z\to 1} \frac{-1}{1 + C(z)\bar{H}(z)} \quad ,$$

donde $\lim_{z\to 1}\bar{H}(z) = \infty$ (porque $\bar{H}(z)$ tiene un polo en $z = 1$). Entonces para que $\lim_{k\to+\infty} e_k = 0$, alcanza con tomar $C(z) = K$ con $K \neq 0$ tal que los polos de lazo cerrado se encuentren dentro del círculo de radio uno y centro en el origen.



4.3. Lugar geométrico de las raíces paramétrico en $K > 0$

Ceros de $\bar{H}(z)$: $-b_2/b_1 \approx -0,7943$. Polos de $\bar{H}(z)$: 1 y $0,5$. Asíntotas: una (sobre el eje real). Candidatos a puntos múltiples: ceros de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bar{H}(z) = \frac{10\left(-b_1 z^2 - 2b_2 z + 0,5b_1 + 1,5b_2\right)}{\left(z^2 - 1,5z + 0,5\right)^2} = \frac{-10b_1\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)}{\left(z^2 - 1,5z + 0,5\right)^2} \quad ;$$

donde $z_1 \approx 0,7296$ y $z_2 \approx -2,3183$ son puntos múltiples porque pertenecen al lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

Se elige K de forma tal que los dos polos de lazo cerrado coincidan en $z = z_1$:

$$K = \frac{-1}{\bar{H}(z_1)} \approx 2,1092 \times 10^{-4} \quad .$$

Con esta elección, como $|z_1| < 1$, el sistema realiementado resulta estable; ya que todos sus polos quedan dentro del círculo de radio uno y centro en el origen del plano complejo.

5. Condiciones adversas

El retardo de dos períodos de muestreo introduce un factor z^{-2} en la transferencia de lazo abierto. Los nuevos polos de lazo cerrado son las raíces de: $1 + z^{-2}K\bar{H}(z)$.

Sea

$$d(z) = \left(z^2 - 1,5z + 0,5\right)z^2 + 10K\left(b_1 z + b_2\right) = z^4 - 1,5z^3 + 0,5z^2 + 10Kb_1 z + 10Kb_2 \quad ;$$

donde $10Kb_1 \approx 0,040739$ y $10Kb_2 \approx 0,032361$.

Se aplica el criterio de estabilidad de Jury al polinomio $d(z)$.

$\boxed{1}$	-1,5	0,5	0,040739	0,032361	
0,032361	0,040739	0,5	-1,5	1	(0,032361)
$\boxed{0{,}99895}$	-1,5013	0,48382	0,089280		
0,089280	0,48382	-1,5013	0,99895		(0,089374)
$\boxed{0{,}99097}$	-1,5446	0,61800			
0,61800	-1,5446	0,99097			(0,62363)
$\boxed{0{,}60557}$	-0,58133				
-0,58133	0,60557				(-0,95997)
$\boxed{0{,}047516}$					

Arreglo de Jury

Como todos los elementos recuadrados del arreglo de Jury son positivos, se concluye que el sistema realimentado sigue siendo estable, aún cuando las muestras se reciban con un retardo de dos períodos de muestreo. Por lo tanto, el diseño de la parte anterior es viable.