# Problema 1 (solución)



## (1) Modelo

$$\begin{cases} cV_1\dot{T}_1 = cF(T-T_1) + Q_S + Q_G \\ cV\dot{T} = cF(T_1-T) - k(T-T_{AMB}) \end{cases}$$

Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} T_1 \\ T \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1}(T-T_1)F + \frac{1}{cV_1}Q_G + \frac{1}{cV_1}Q_S \\ \frac{1}{V}(T_1-T)F - \frac{k}{cV}(T-T_{AMB}) \end{bmatrix} \\ [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T \end{bmatrix} \end{cases}$$

## (2) Punto de operación

$$\begin{cases} Q_S^o + Q_G^o = cF^o(T_1^o - T^o) \\ k(T^o - T_{AMB}^o) = cF^o(T_1^o - T^o) \end{cases} \Longrightarrow Q_S^o + Q_G^o = k(T^o - T_{AMB}^o) = cF^o(T_1^o - T^o)$$

$$\boxed{T^o = \frac{Q_G^o + Q_S^o}{k} + T_{AMB}^o}$$

$$T_1^o = \frac{Q_S^o + Q_G^o}{cF^o} + T^o \Longleftrightarrow T_1^o = \frac{Q_G^o + Q_S^o}{cF^o} + \frac{Q_G^o + Q_S^o}{k} + T_{AMB}^o$$

$$\boxed{T_1^o = \left(\frac{1}{cF^o} + \frac{1}{k}\right)(Q_G^o + Q_S^o) + T_{AMB}^o}$$

## (3) Linealización

$$\begin{cases} cV_1\dot{t}_1 = cF^o(t - t_1) + q_S + q_G + c(T^o - T_1^o)f \\ cV\dot{t} = cF^o(t_1 - t) + c(T_1^o - T^o)f - k(t - t_{AMB}) \end{cases}$$

donde: $t_1 = T_1 - T_1^o$ $\quad q_S = Q_S - Q_S^o$ $\quad f = F - F^o$

$t = T - T^o$ $\quad q_G = Q_G - Q_G^o$

$t_{AMB} = T_{AMB} - T_{AMB}^o$

Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \mathbb{B}u \\ t = Cx \end{cases} \quad \text{donde: } x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} q_G \\ q_S \\ t_{AMB} \\ f \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-F^o}{V_1} & \frac{F^o}{V_1} \\ \frac{F^o}{V} & \frac{-(cF^o+k)}{cV} \end{bmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{cV_1} & \frac{1}{cV_1} & 0 & \frac{T^o - T_1^o}{V_1} \\ 0 & 0 & \frac{k}{cV} & \frac{T_1^o - T^o}{V} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = [0 \quad 1]$$

Matriz de transferencia:

$$M(s) = \mathbb{C}(sI - A)^{-1}\mathbb{B}$$

$$\boxed{M(s) = \begin{bmatrix} \frac{F^o/V_1}{cV\Delta(s)} & \frac{F^o/V_1}{cV\Delta(s)} & \frac{k\left(s + F^o/V_1\right)}{cV\Delta(s)} & \frac{(T_1^o - T^o)s}{V\Delta(s)} \end{bmatrix}}$$

$$\text{donde } \Delta(s) = \det(sI - A) = s^2 + \left(\frac{k}{cV} + \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V}\right)F^o\right)s + \frac{kF^o}{cVV_1}$$

Estabilidad:

Polinomio característico: $\Delta(s) = s^2 + c_1 s + c_2$ con $\begin{cases} c_1 = \frac{k}{cV} + \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V}\right)F^o \\ c_2 = \frac{kF^o}{cVV_1} \end{cases}$

Routh-Hurwitz:

| | | |
|---|---|---|
| $s^2$ | $1$ | $c_2$ |
| $s^1$ | $c_1$ | |
| $s^0$ | $c_2$ | |

El sistema es estable porque $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$.

Polos:

Si $V_1 \ll V$ $\quad c_1 \simeq \frac{k}{cV} + \frac{F^o}{V_1}$ y $c_2 = \frac{k}{cV} \cdot \frac{F^o}{V_1}$

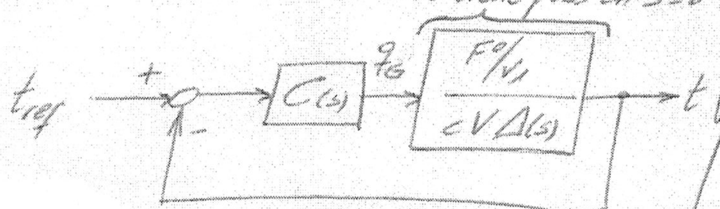
Entonces $\Delta(s) \simeq \left(s + \frac{k}{cV}\right)\left(s + \frac{F^o}{V_1}\right)$ y los polos son $\frac{-k}{cV}$ y $\frac{-F^o}{V_1}$.

## (4) Diseño del controlador

$$t(s)=\frac{F^0/V_1}{cV\Delta(s)}\,q_G(s)+\frac{F^0/V_1}{cV\Delta(s)}\,q_S(s)+\frac{k\left(s+F^0/V_1\right)}{cV\Delta(s)}\,t_{AMB}(s)+\frac{\left(T_1^0-T^0\right)s}{V\Delta(s)}\,f(s)$$

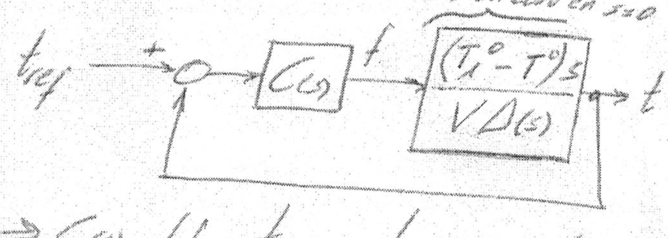
Para que, en régimen estacionario, se rechacen completamente perturbaciones de tipo escalón en $q_S$ y en $t_{AMB}$, es necesario que el sistema realimentado sea de tipo mayor o igual que 1. Es decir, debe haber al menos un polo de la transferencia de lazo abierto en $s=0$.

Sist. de control 1:




$\Rightarrow C(s)$ debe tener al menos un polo en $s=0$

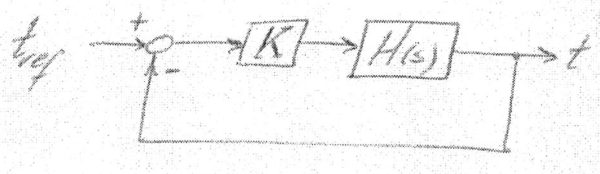
Sist. de control 2:




$\Rightarrow C(s)$ debe tener al menos dos polos en $s=0$.

Esto no es posible con el PID.

Entonces, elegimos el sistema de control 1:




donde $H(s)=\dfrac{(s+K_I)(1+K_D s)}{s}\cdot\dfrac{F^0/V_1}{cV\Delta(s)}$

$$\Delta(s)\simeq\left(s+\frac{k}{cV}\right)\left(s+\frac{F^0}{V_1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}V_1\ll V\\ \frac{k}{c}\ll F^0\end{array}\right\}\ \frac{k}{cV}\ll\frac{F^0}{V_1}$$

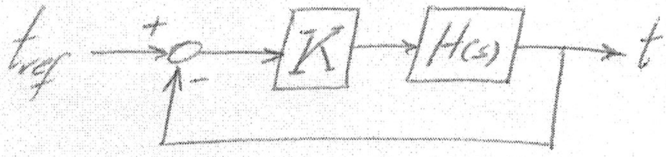
$$\hookrightarrow H(s)\simeq\frac{(s+K_I)(1+K_D s)}{s}\cdot\frac{\cancel{\frac{F^0}{V_1}}}{cV\cancel{\frac{F^0}{V_1}}\left(s+\frac{k}{cV}\right)}$$

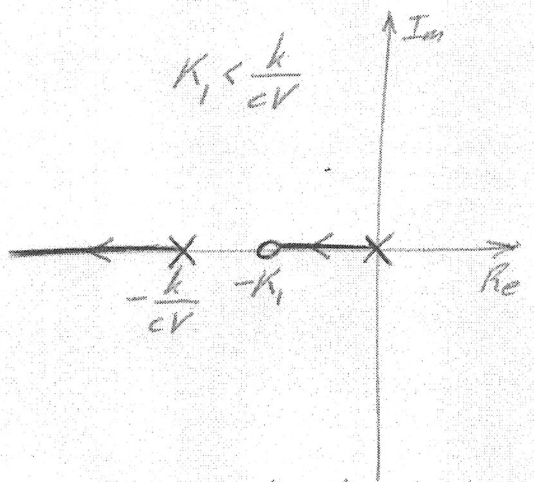
$\dfrac{-k}{cV}$ es el polo dominante del sistema a controlar $\Rightarrow$

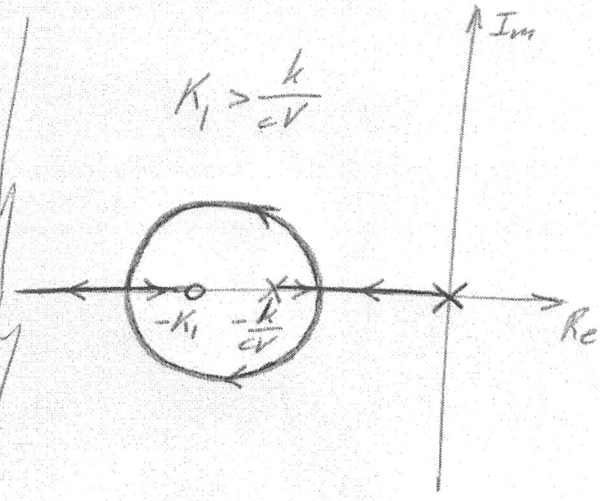
$\Rightarrow$ La mayor cte. de tiempo del sistema a controlar es $\dfrac{cV}{k}$.

Veamos si es posible cumplir con los requerimientos tomando $K_D = 0$.

$$H(s) = \frac{s + K_I}{cV\, s\left(s + \frac{k}{cV}\right)}$$




$\nexists K > 0$ para el cual todos los polos de lazo cerrado tengan parte real menor que $-\frac{k}{cV}$.

$\exists K_{min} > 0$ tal que $\forall K > K_{min}$ todos los polos de lazo cerrado tienen parte real menor que $-\frac{k}{cV}$.

$\Downarrow$

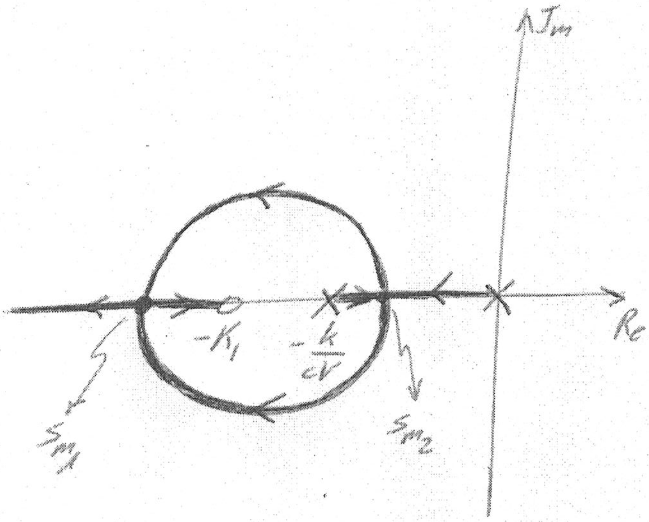
$\exists K_{min} > 0$ tal que $\forall K > K_{min}$ todas las constantes de tiempo del lazo cerrado son menores que $\frac{cV}{k}$.

$\Rightarrow$ Alcanza con configurar el PID en modo proporcional-integral:

$$\boxed{K, K_I > 0 \quad y \quad K_D = 0}$$

con $\boxed{K_I > \frac{k}{cV}}$ y $K$ suficientemente grande.

Para encontrar una condición suficiente sobre $K$, estudiemos los puntos múltiples:




$s_{m_1}$ y $s_{m_2}$ son las soluciones de:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+K_1}{s\left(s+\frac{k}{cV}\right)}\right)=0$$

$$\Downarrow \quad s^2+2K_1 s+\frac{kK_1}{cV}=0$$

$$s_{m_1}=-K_1-\sqrt{K_1\left(K_1-\frac{k}{cV}\right)}$$

$$s_{m_2}=-K_1+\sqrt{K_1\left(K_1-\frac{k}{cV}\right)}$$

Si $K>\left.\frac{-1}{H(s)}\right|_{s=s_{m_1}}$ entonces los polos de lazo cerrado tienen parte real menor que $-\frac{k}{cV}$ (condición suficiente pero no necesaria).

En resumen las condiciones son:

$$\boxed{\begin{array}{l} K_D=0 \\ K_1>\frac{k}{cV} \\ K>\dfrac{cV\left(K_1+\sqrt{K_1\left(K_1-\frac{k}{cV}\right)}\right)\left(K_1+\sqrt{K_1\left(K_1-\frac{k}{cV}\right)}-\frac{k}{cV}\right)}{\sqrt{K_1\left(K_1-\frac{k}{cV}\right)}} \end{array}}$$