Tópicos de control
Parte 3

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2025

Contenido

Backstepping (Khalil, capítulo 13 (2a Ed.).)

- Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta} & = & f(\eta) + g(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} & = & u \end{cases}$$

  con $\eta \in \mathcal{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{R}$.
- Es un caso de linealización entrada-salida, con la dinámica de los ceros de una forma particular.
- Supongamos que conocemos $\Phi(\eta)$ que estabiliza el sistema:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)$$

- con la función de Lyapunov $V(\eta)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}(\eta).\left[f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)\right] \leq -W(\eta) \quad \text{(definida negativa)}$$

Backstepping

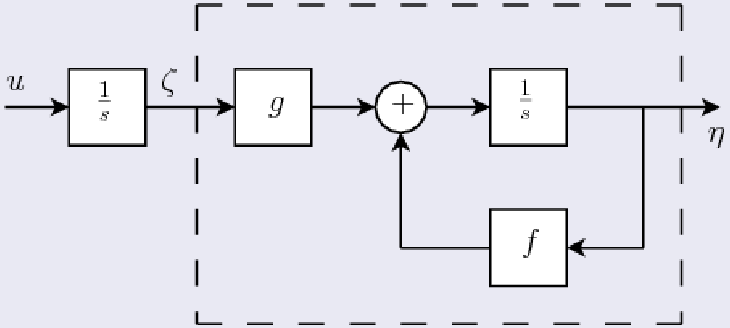
- Podemos reformular el problema introduciendo una nueva variable $z = \zeta - \Phi(\eta)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\eta} & = & [f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)] + g(\eta)z \\ \dot{z} & = & u - \dot{\Phi}(\eta) \; = \; v \end{array} \right.$$

- El problema ahora es diseñar v de manera tal que el origen $\eta = 0$, $z = 0$ sea un atractor.

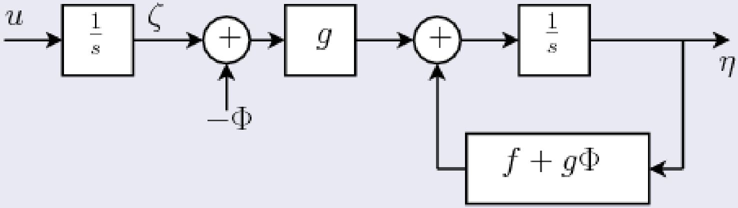
Backstepping

Diagramas ilustrativos



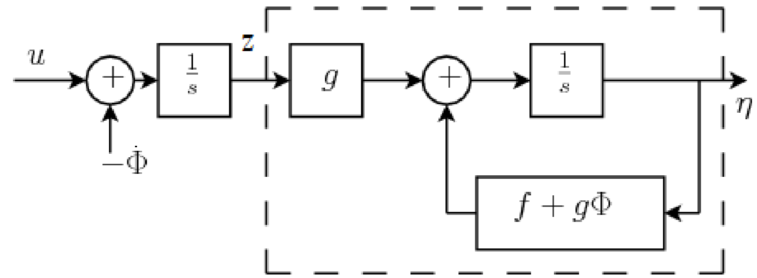
Backstepping

Diagramas ilustrativos



Backstepping

Diagramas ilustrativos



Backstepping

Diseño de v

- Definamos la función candidata $V_a(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2$.
- La derivada sobre las trayectorias es:

$$\dot{V}_a(\eta, z) = \frac{\partial V}{\partial \eta}\left[f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)\right] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) z + zv$$

$$\dot{V}_a(\eta, z) \leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) z + zv$$

- Eligiendo $v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - kz$, resulta

$$\dot{V}_a(\eta, z) \leq -W(\eta) - kz^2$$

Backstepping

Realimentación estabilizante (en η, ζ)

$$u(\eta,\zeta) = \dot{\Phi}(\eta) + v = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\left[f(\eta) + g(\eta)\zeta\right] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k\left[\zeta - \Phi(\eta)\right]$$

Backstepping

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases}$$

El primer subsistema se puede estabilizar con la realimentación

$$\Phi(x_1) = -\frac{3}{2}x_1^2 \quad , \quad \left[\dot{\Phi}(x_1) = 3x_1\left(\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^3 + x_2\right)\right]$$

con función de Lyapunov $\frac{1}{2}x_1^2$. Resulta la realimentación no lineal de estados:

$$u = -k\left(x_2 + \frac{3}{2}x_1^2\right) - x_1 + 3x_1\left(\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^3 + x_2\right)$$

Backstepping

Caso más general

- Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_\eta(\eta) + g_\eta(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} &= f_\zeta(\eta,\zeta) + g_\zeta(\eta,\zeta)u \end{cases}$$

  con $\eta \in \mathcal{R}^n$, $\zeta \in \mathcal{R}$.

- Supongamos que g_ζ es invertible. Entonces, definamos

$$u = g_\zeta^{-1}(\eta,\zeta)\left[v - f_\zeta(\eta,\zeta)\right]$$

- El sistema nuevo queda así

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_\eta(\eta) + g_\eta(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} &= v \end{cases}$$

  y se procede igual que antes.

Backstepping

Strict feedback nonlinear systems

Se puede extender sin problemas al caso en que ζ es un vector y a sistemas no lineales en la forma realimentación estricta:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{\hat{x}}_1 & = & f_1(\hat{x}_1) + g_1(\hat{x}_1)\hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 & = & f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\hat{x}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{\hat{x}}_m & = & f_m(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m) + g_m(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)u \end{array}\right.$$

Ejemplo

Consideremos este sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + x^2 z \\ \dot{z} &= u \end{aligned}$$

Linealizando

La linealización Jacobiana en el origen da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{z} &= u \end{aligned}$$

Poniendo $u = -\gamma z$, con $\gamma > 0$, obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ estabilidad asintótica del origen (local o global ?)

Ejemplo

Miremos bien el sistema realimentado para ver si la estabilidad es o no global

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 z \\ \dot{z} &= -\gamma z\end{aligned}$$

$\Phi(x,z) = xz$

- Derivemos sobre las trayectorias: $\dot{\Phi} = z(-x+x^2z)+x(-\gamma z) = -(1+\gamma)xz+x^2z^2 = -(1+\gamma)\Phi+\Phi^2$
- Si (x,z) son tales que $xz = (1+\gamma)$, entonces $\dot{\phi} = 0$.
- Puede verse que separa al origen de un conjunto de puntos que no son atraidos por él.
- El origen es localmente atractor en $\{xz < 1+\gamma\}$.
- Su región de atracción puede hacerse arbitrariamente grande, con γ (estabilización semiglobal).

Ejemplo

Aplicamos backstepping

- Primero consideramos $\dot{x} = -x + x^2 z$ con z como entrada.
- Se estabiliza, por ejemplo, con una realimentación nula $\phi_0(x) = 0$ y con función de Lyapunov asociada $V_0(x) = \frac{1}{2}x^2$.
- Entonces: $\frac{\partial V_0}{\partial x}\left[-x + x^2\phi_0(x)\right] = -x^2 \;, \quad \forall x$
- Recordemos la realimentación estabilizante:

$$u(\eta,\zeta) = \dot{\Phi}(\eta) + v = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\left[f(\eta) + g(\eta)\zeta\right] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k\left[\zeta - \Phi(\eta)\right]$$

- Obtenemos la realimentación estabilizante $u = -(x^3 + kz)$, con $k > 0$ y función de Lyapunov asociada $V(x,z) = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$, con derivada

$$\dot{V}(x,z) = -x^2 - kz^2$$

lo que asegura la estabilidad global!!

Control deslizante (Khalil, capítulo 13 (2a Ed.).)

Sistema en la *forma regular*

$$\begin{cases} \dot{\eta} & = & f(\eta,\zeta) + \delta_\eta(\eta,\zeta) \\ \dot{\zeta} & = & f_a(\eta,\zeta) + G_a(\eta,\zeta)[u + \delta_\zeta(\eta,\zeta,u)] \end{cases}$$

- $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada.
- $\eta \in \mathbb{R}^{n-p}$, $\zeta \in \mathbb{R}^p$.
- $f(0,0) = 0$, $f_a(0,0) = 0$
- δ_η es una incertidumbre aditiva, $\delta_\eta(0,0) = 0$.
- δ_ζ es una incertidumbre que cumple la *matching condition*.
- G_a invertible en un entorno del origen.

Problema

Estabilizar de manera robusta el origen $(\eta = 0, \zeta = 0)$.

Control deslizante

Sistema en la *forma regular*

$$\begin{cases} \dot{\eta} & = & f(\eta,\zeta) + \delta_\eta(\eta,\zeta) \\ \dot{\zeta} & = & f_a(\eta,\zeta) + G_a(\eta,\zeta)[u + \delta_\zeta(\eta,\zeta,u)] \end{cases}$$

Aplicamos backstepping.

Supongamos que conocemos una realimentación $\zeta = \Phi(\eta)$ tal que:

$$\dot{\eta} = f\left(\eta, \Phi(\eta)\right) + \delta_\eta\left(\eta, \Phi(\eta)\right)$$

tiene un atractor en el origen.

Definamos la variable $z = \zeta - \Phi(\eta)$.

Sliding mode control

Diseñar u de manera de llevar z a 0 en tiempo finito y luego forzar la condición $z \equiv 0$ para todo tiempo futuro.

Control deslizante

Dinámica de z

$$\dot{z} = \dot{\zeta} - \dot{\Phi}(\eta) = f_a(\eta,\zeta) + G_a(\eta,\zeta)[u + \delta_\zeta(\eta,\zeta,u)] - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}[f(\eta,\zeta) + \delta_\eta(\eta,\zeta)]$$

Control equivalente: u_{eq}

Definamos $u = u_{eq} + G_a^{-1}(\eta,\zeta)v$, donde v es la nueva acción de control a diseñar y

$$u_{eq} = G_a^{-1}(\eta,\zeta)\left[-f_a(\eta,\zeta) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} f(\eta,\zeta)\right]$$

En ausencia de incertidumbre, el *control equivalente* impone $\dot{z} = 0$. Es con ese control que se analiza la dinámica del modo deslizante.

Control deslizante

Sustituyendo el control en la dinámica de z:

$$\dot{z} = v + G_a(\eta,\zeta)\delta_\zeta(\eta,\zeta,u) - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\delta_\eta(\eta,\zeta) = v + \Delta(\eta,\zeta,v)$$

Cota para Δ

Supongamos que:

$$\|\Delta\|_\infty \leq \rho(\eta,\zeta) + k\|v\|_\infty$$

con $\rho \geq 0$ y $0 \leq k < 1$.

Consideremos las p ecuaciones

$$\dot{z}_i = v_i + \Delta_i(\eta,\zeta,v) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

Control deslizante

Con la misma idea de *Lyapunov redesign*:

Elijamos $b > 0$ y diseñamos v_i:

$$v_i = -\frac{\rho(\eta,\zeta)+b}{1-k} sg(z_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

Consideremos la función $V_i(z_i) = \frac{1}{2} z_i^2$.
Tenemos que

$$\dot{V}_i(z_i) = z_i \times \dot{z}_i = \; -\frac{\rho(\eta,\zeta)+b}{1-k} z_i sg(z_i) + z_i \Delta_i(\eta,\zeta,v)$$

$$\leq -\left(\frac{\rho(\eta,\zeta)+b}{1-k}\right)|z_i| + |z_i|\rho(\eta,\zeta) + |z_i|k\|v\|_\infty$$

$$= -\left(\frac{\rho(\eta,\zeta)+b}{1-k}\right)(1-k)|z_i| + |z_i|\rho(\eta,\zeta) \leq -b|z_i|$$

Control deslizante

$$\Rightarrow \dot{V}_i(z_i) \leq -b|z_i| = -b\sqrt{2V_i}$$

Esto asegura que $z_i = 0$ es un invariante!!!

Aplicando el lema de comparación obtenemos la desigualdad

$$|z_i(t)| \leq |z_i(0)| - bt \quad , \quad t \geq 0$$

que implica que la trayectoria alcanza la superficie $z_i = 0$ en un tiempo finito, menor que $\frac{|z_i(0)|}{b}$.

Control deslizante

Resumiendo

Con la señal de control diseñada, tenemos

- una primera etapa de *llegar* a la superficie $z = 0$;
- una segunda etapa de *mantenernos* en dicha superficie, y converger a $\eta = 0$, de acuerdo a la dinámica equivalente que diseñamos.

Para ello hay que:

- diseñar la *superficie deslizante* $\zeta = \Phi(\eta)$;
- estimar ρ y k;
- construir el control $u = u_{eq} + v$, con el *control equivalente* y la señal conmutada.

Ejemplo

Péndulo forzado con fricción

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1+\bar{\theta}) - bx_2 + cu \end{cases}$$

Objetivo: estabilizar el sistema en el ángulo $\bar{\theta}$ (el origen debe ser un atractor).

Supongamos que conocemos los valores nominales $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, y definamos

$$\delta(x,u) = \frac{1}{\hat{c}}\left[-(a-\hat{a})\sin(x_1+\bar{\theta}) - (b-\hat{b})x_2 + (c-\hat{c})u\right]$$

El sistema queda así:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\hat{a}\sin(x_1+\bar{\theta}) - \hat{b}x_2 + \hat{c}\left[u+\delta(x,u)\right] \end{cases}$$

Ejemplo

$\dot{x}_1 = x_2$

Diseñamos la realimentación estabilizante $x_2 = \Phi(x_1) = -\mu x_1$, con $\mu > 0$.

$\dot{z} = v + \Delta(x_1, x_2, v)$

La superficie deslizante es $z = x_2 + \mu x_1 = 0$ y el control equivalente es

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{c}} \left[\hat{a} \sin(x_1 + \bar{\theta}) + \hat{b} x_2 - \mu x_2 \right] \quad (\dot{z} = 0)$$

$$\Delta(x_1, x_2, v) = -(a - \hat{a}) \sin(x_1 + \bar{\theta}) - (b - \hat{b}) x_2 + (c - \hat{c}) \left(u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}} \right)$$

Ejemplo

Cotas para la perturbación

$$\|\Delta\| \leq \rho(x) + k|v|$$

$$\rho(x) = k_1 + k_2|x_2| \quad , \quad k_1 \geq \left|\frac{c\hat{a} - a\hat{c}}{\hat{c}}\right| \quad , \quad k_2 \geq \left|\frac{c\hat{b} - b\hat{c}}{\hat{c}} - \mu\left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right)\right|$$

$$1 \geq k \geq \left|\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right|$$

Control deslizante

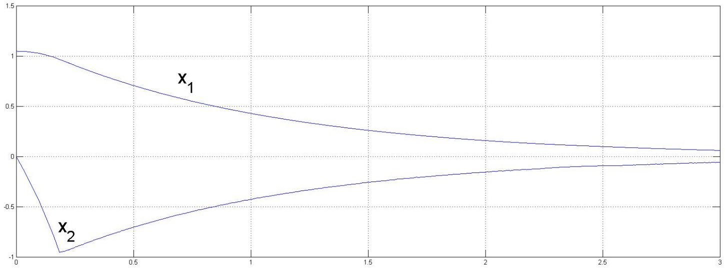
$$u = u_{eq} + \frac{\rho(x) + b_0}{\hat{c}(1-k)}.sg(x_2 + \mu x_1)$$

Control *suavizado*, para evitar el *chattering*

$$u_s = u_{eq} + \frac{\rho(x) + b_0}{\hat{c}(1-k)}.sat\left(\frac{x_2 + \mu x_1}{\epsilon}\right)$$

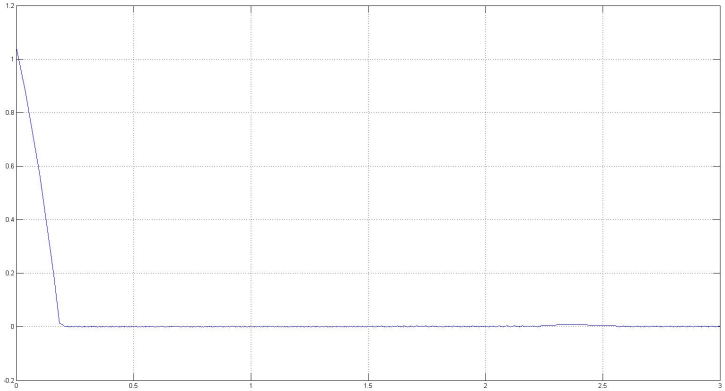
Ejemplo

Simulaciones: $(x_1,\, x_2)$



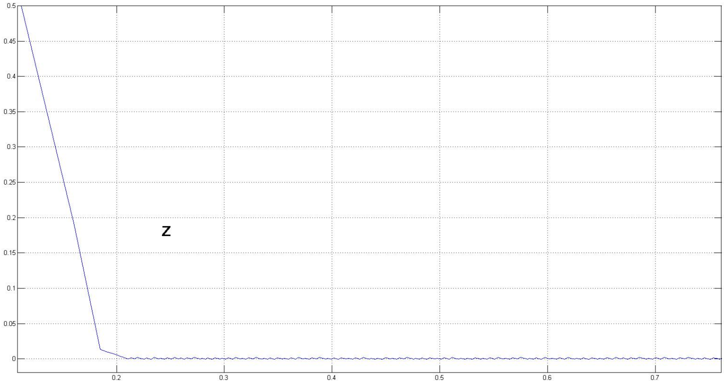
Ejemplo

Simulaciones: z



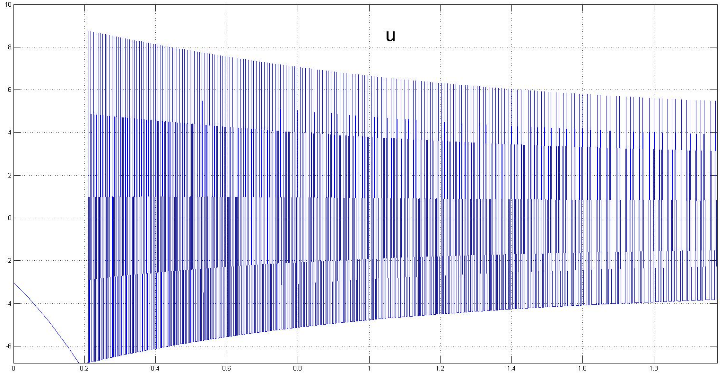
Ejemplo

Simulaciones: z (detalle)



Ejemplo

Simulaciones: señal de control



Ejemplo

Consideremos este sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con θ_1 y θ_2 desconocidos, pero tales que $|\theta_1| \leq a$, $|\theta_2| \leq b$.

Primer enfoque: backstepping

- vemos los términos $\delta_1 = \theta_1 x_1 \sin(x_2)$ y $\delta_2 = \theta_2 x_2^2$ como perturbaciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + u\end{aligned}$$

- Ponemos $x_2 = -kx_1$ y estabilizamos la primer dinámica. Tenemos la función de Lyapunov $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$.

Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con θ_1 y θ_2 desconocidos, pero tales que $|\theta_1| \leq a$, $|\theta_2| \leq b$.

Primer enfoque: backstepping

- Derivamos respecto del sistema perturbado:

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 + \theta_1 x_1^2 \sin(x_2) \leq -(k_1 - a)x_1^2 \Rightarrow k_1 > a$$

- Elegimos $k_1 = 1 + a$ y diseñamos el control

$$u = -2x_1 - k_1 x_2 - k(x_2 + k_1 x_1) \quad , \quad V(x) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + (x_2 + kx_1)^2\right]$$

con k a definir.

Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con θ_1 y θ_2 desconocidos, pero tales que $|\theta_1| \leq a$, $|\theta_2| \leq b$.

Segundo enfoque: sliding control

- Consideramos el sistema $\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)$ y elegimos la realimentación $x_2 = -(1+a)x_1$, que estabiliza, como permite ver la función de Lyapunov $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$.
- $\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = -(1+a)x_1^2 + \theta_1 x_1^2 \sin(x_2) \leq -x_1^2$
- La superficie deslizante es:

$$z = x_2 + (1+a)x_1 = 0$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)\\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con θ_1 y θ_2 desconocidos, pero tales que $|\theta_1| \leq a$, $|\theta_2| \leq b$.

Segundo enfoque: sliding control

- La superficie deslizante es: $z = x_2 + (1+a)x_1 = 0$. La derivada es

$$\dot{z} = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u + (1+a)\left(x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)\right)$$

- El *control equivalente* es $u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2$ y $u = u_{eq} + v$ nos lleva a

$$\dot{z} = v + \theta_2 x_2^2 + (1+a)\theta_1 x_1 \sin(x_2) = v + \Delta(x)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u \end{aligned}$$

con θ_1 y θ_2 desconocidos, pero tales que $|\theta_1| \leq a$, $|\theta_2| \leq b$.

Segundo enfoque: sliding control

- $\dot{z} = v + \theta_2 x_2^2 + (1+a)\theta_1 x_1 \sin(x_2) = v + \Delta(x)$.
- $|\Delta(x)| \leq a(1+a)|x_1| + b x_2^2 = \rho(x)$.
- Definamos $b_0 > 0$.
- El controlador deslizante es $u = u_{eq} - (\rho(x) + b_0) sgn(z)$

Comentarios

- La excesiva conmutación de la entrada puede no ser admisible, por lo que se puede usar la estrategia de suavizado ya vista en el rediseño.
- Esto puede llevar a la convergencia hacia una *banda* donde el sistema desliza.
- Valen también los comentarios sobre la existencia y unicidad de soluciones para sistemas con lado derecho discontinuo (teoría de Filippov).

Resumen

Péndulo forzado con fricción

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1+\bar{\theta}) - bx_2 + cu \end{cases}$$

Controladores

- Linealización Jacobiana:

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}}\sin(\bar{\theta}) + k_1x_1 + k_2x_2$$

- Linealización exacta

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}}\left[\sin(x_1+\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\right] + \frac{1}{\hat{c}}(k_1x_1 + k_2x_2)$$

Resumen

Controladores

- Linealización Jacobiana:

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}} \sin(\bar{\theta}) + k_1 x_1 + k_2 x_2$$

- Linealización exacta

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}} \left[\sin(x_1 + \bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\right] + \frac{1}{\hat{c}}(k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

- Lyapunov redesign

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}} \left[\sin(x_1 + \bar{\theta})\right] + \frac{1}{\hat{c}}(k_1 x_1 + k_2 x_2) - \frac{\rho(x)}{1-k} . \frac{w}{\|w\|_2}$$

- Control deslizante

$$u = \frac{1}{\hat{c}} \left[\hat{a} \sin(x_1 + \bar{\theta}) + \hat{b} x_2 - \mu x_2\right] + \frac{\rho(x) + b_0}{\hat{c}(1-k)} . sg(x_2 + \mu x_1)$$