

# Tópicos de control

## Parte 3

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control  
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)  
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República  
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales  
Primer semestre - 2023



# Contenido

1 Backstepping

2 Sliding control

## Backstepping (Khalil, capítulo 13 (2a Ed.).)

- Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} &= u \end{cases}$$

con  $\eta \in \mathcal{R}^n$ ,  $\zeta \in \mathcal{R}$ .

- Es un caso de linealización entrada-salida, con la dinámica de los ceros de una forma particular.
- Supongamos que conocemos  $\Phi(\eta)$  que estabiliza el sistema:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)$$

- con la función de Lyapunov  $V(\eta)$  tal que

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}(\eta) \cdot [f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)] \leq -W(\eta) \quad (\text{definida negativa})$$

# Backstepping

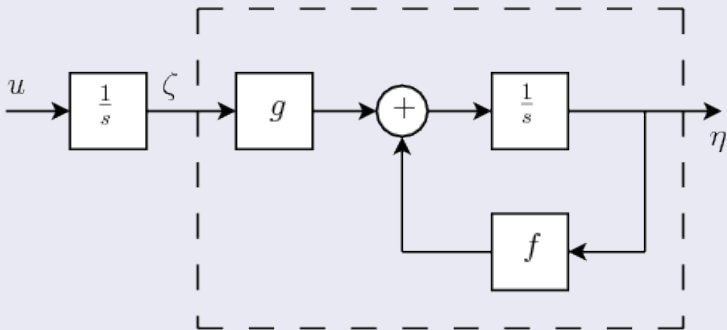
- Podemos reformular el problema introduciendo una nueva variable  $z = \zeta - \Phi(\eta)$ :

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)] + g(\eta)z \\ \dot{z} &= u - \dot{\Phi}(\eta) = v \end{cases}$$

- El problema ahora es diseñar  $v$  de manera tal que el origen  $\eta = 0$ ,  $z = 0$  sea un atractor.

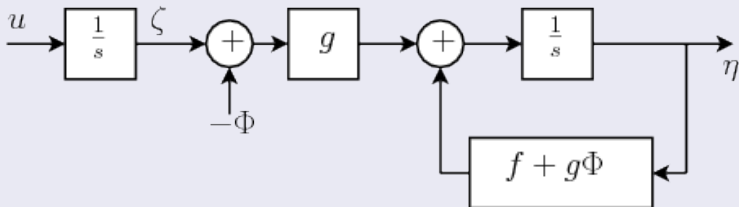
# Backstepping

## Diagramas ilustrativos



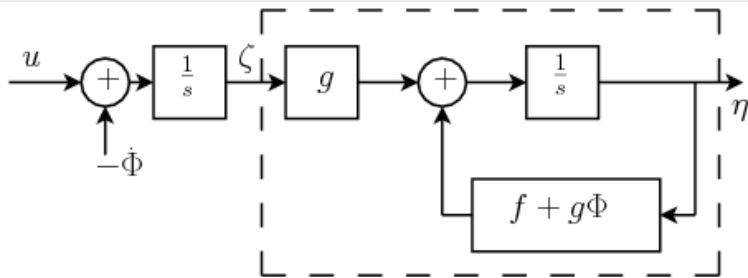
# Backstepping

## Diagramas ilustrativos



# Backstepping

## Diagramas ilustrativos



# Backstepping

## Diseño de $v$

- Definamos la función candidata  $V_a(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2$ .
- La derivada sobre las trayectorias es:

$$\dot{V}_a(\eta, z) = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\Phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv$$

$$\dot{V}_a(\eta, z) \leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv$$

- Eligiendo  $v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - kz$ , resulta

$$\dot{V}_a(\eta, z) \leq -W(\eta) - kz^2$$



# Backstepping

## Realimentación estabilizante (en $\eta, \zeta$ )

$$u(\eta, \zeta) = \dot{\Phi}(\eta) + v = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\zeta] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k [\zeta - \Phi(\eta)]$$

# Backstepping

## Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases}$$

El primer subsistema se puede estabilizar con la realimentación

$$\Phi(x_1) = -\frac{3}{2}x_1^2, \quad \left[ \dot{\Phi}(x_1) = 3x_1 \left( \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^3 + x_2 \right) \right]$$

con función de Lyapunov  $\frac{1}{2}x_1^2$ . Resulta la realimentación no lineal de estados:

$$u = -k \left( x_2 + \frac{3}{2}x_1^2 \right) - x_1 + 3x_1 \left( \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^3 + x_2 \right)$$

# Backstepping

## Caso más general

- Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_{\eta}(\eta) + g_{\eta}(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} &= f_{\zeta}(\eta, \zeta) + g_{\zeta}(\eta, \zeta)u \end{cases}$$

con  $\eta \in \mathcal{R}^n$ ,  $\zeta \in \mathcal{R}$ .

- Supongamos que  $g_{\zeta}$  es invertible. Entonces, definamos

$$u = g_{\zeta}^{-1}(\eta, \zeta) [v - f_{\zeta}(\eta, \zeta)]$$

- El sistema nuevo queda así

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f_{\eta}(\eta) + g_{\eta}(\eta)\zeta \\ \dot{\zeta} &= v \end{cases}$$

y se procede igual que antes.

# Backstepping

## *Strict feedback nonlinear systems*

Se puede extender sin problemas al caso en que  $\zeta$  es un vector y a sistemas no lineales en la forma realimentación estricta:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= f_1(\hat{x}_1) + g_1(\hat{x}_1)\hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + g_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)\hat{x}_3 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\hat{x}}_m &= f_m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) + g_m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)u \end{cases}$$

## Ejemplo

Consideremos este sistema

$$\dot{x} = -x + x^2 z$$

$$\dot{z} = u$$

### Linealizando

La linealización Jacobiana en el origen da

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{z} = u$$

Poniendo  $u = -\gamma z$ , con  $\gamma > 0$ , obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

⇒ estabilidad asintótica del origen (local o global ?)

## Ejemplo

Miremos bien el sistema realimentado para ver si la estabilidad es o no global

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 z \\ \dot{z} &= -\gamma z\end{aligned}$$

$$\Phi(x, z) = xz$$

- Derivemos sobre las trayectorias:

$$\dot{\Phi} = z(-x + x^2 z) + x(-\gamma z) = -(1 + \gamma)xz + x^2 z^2 = -(1 + \gamma)\Phi + \Phi^2$$

- Si  $(x, z)$  son tales que  $xz = (1 + \gamma)$ , entonces  $\dot{\Phi} = 0$ .
- Puede verse que separa al origen de un conjunto de puntos que no son atraídos por él.
- El origen es localmente atractor en  $\{xz < 1 + \gamma\}$ .
- Su región de atracción puede hacerse arbitrariamente grande, con  $\gamma$  (estabilización semiglobal).

## Ejemplo

## Aplicamos backstepping

- Primero consideramos  $\dot{x} = -x + x^2 z$  con  $z$  como entrada.
- Se estabiliza, por ejemplo, con una realimentación nula  $\phi_0(x) = 0$  y con función de Lyapunov asociada  $V_0(x) = \frac{1}{2}x^2$ .
- Entonces:  $\frac{\partial V_0}{\partial x} [-x + x^2 \phi_0(x)] = -x^2$ ,  $\forall x$
- Recordemos la realimentación estabilizante:

$$u(\eta, \zeta) = \dot{\Phi}(\eta) + v = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\zeta] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\zeta - \Phi(\eta)]$$

- Obtenemos la realimentación estabilizante  $u = -(x^3 + kz)$ , con  $k > 0$  y función de Lyapunov asociada  $V(x, z) = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$ , con derivada

$$\dot{V}(x, z) = -x^2 - kz^2$$

lo que asegura la estabilidad global!!

## Control deslizante (Khalil, capítulo 13 (2a Ed.).)

### Sistema en la forma regular

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f(\eta, \zeta) + \delta_{\eta}(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= f_{\alpha}(\eta, \zeta) + G_{\alpha}(\eta, \zeta)[u + \delta_{\zeta}(\eta, \zeta, u)] \end{cases}$$

- $u \in \mathbb{R}^p$  es la entrada.
- $\eta \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^p$ .
- $f(0, 0) = 0$ ,  $f_{\alpha}(0, 0) = 0$
- $\delta_{\eta}$  es una incertidumbre aditiva,  $\delta_{\eta}(0, 0) = 0$ .
- $\delta_{\zeta}$  es una incertidumbre que cumple la *matching condition*.
- $G_{\alpha}$  invertible en un entorno del origen.

### Problema

Estabilizar de manera robusta el origen ( $\eta = 0, \zeta = 0$ ).



## Control deslizante

### Sistema en la *forma regular*

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= f(\eta, \zeta) + \delta_{\eta}(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} &= f_a(\eta, \zeta) + G_a(\eta, \zeta)[u + \delta_{\zeta}(\eta, \zeta, u)] \end{cases}$$

Aplicamos backstepping.

Supongamos que conocemos una realimentación  $\zeta = \Phi(\eta)$  tal que:

$$\dot{\eta} = f(\eta, \Phi(\eta)) + \delta_{\eta}(\eta, \Phi(\eta))$$

tiene un atractor en el origen.

Definamos la variable  $z = \zeta - \Phi(\eta)$ .

### Sliding mode control

Diseñar  $u$  de manera de llevar  $z$  a 0 en **tiempo finito** y luego forzar la condición  $z \equiv 0$  para todo tiempo futuro.

## Control deslizante

Dinámica de  $z$ 

$$\dot{z} = \dot{\zeta} - \dot{\Phi}(\eta) = f_a(\eta, \zeta) + G_a(\eta, \zeta)[u + \delta_\zeta(\eta, \zeta, u)] - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} [f(\eta, \zeta) + \delta_\eta(\eta, \zeta)]$$

Control equivalente:  $u_{eq}$ 

Definamos  $u = u_{eq} + G_a^{-1}(\eta, \zeta)v$ , donde  $v$  es la nueva acción de control a diseñar y

$$u_{eq} = G_a^{-1}(\eta, \zeta) \left[ -f_a(\eta, \zeta) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} f(\eta, \zeta) \right]$$

En ausencia de incertidumbre, el *control equivalente* impone  $\dot{z} = 0$ . Es con ese control que se analiza la dinámica del modo deslizante.

## Control deslizante

Sustituyendo el control en la dinámica de  $z$ :

$$\dot{z} = v + G_a(\eta, \zeta)\delta_\zeta(\eta, \zeta, u) - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\delta_\eta(\eta, \zeta) = v + \Delta(\eta, \zeta, v)$$

Cota para  $\Delta$

Supongamos que:

$$\|\Delta\|_\infty \leq \rho(\eta, \zeta) + k\|v\|_\infty$$

con  $\rho \geq 0$  y  $0 \leq k < 1$ .

Consideremos las  $p$  ecuaciones

$$\dot{z}_i = v_i + \Delta_i(\eta, \zeta, v) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

## Control deslizante

Con la misma idea de *Lyapunov redesign*:

Elijamos  $b > 0$  y diseñamos  $v_i$ :

$$v_i = -\frac{\rho(\eta, \zeta) + b}{1 - k} \text{sg}(z_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

Consideremos la función  $V_i(z_i) = \frac{1}{2}z_i^2$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(z_i) &= z_i \times \dot{z}_i = -\frac{\rho(\eta, \zeta) + b}{1 - k} z_i \text{sg}(z_i) + z_i \Delta_i(\eta, \zeta, v) \\ &\leq -\left(\frac{\rho(\eta, \zeta) + b}{1 - k}\right) |z_i| + |z_i| \rho(\eta, \zeta) + |z_i| k \|v\|_\infty \\ &= -\left(\frac{\rho(\eta, \zeta) + b}{1 - k}\right) (1 - k) |z_i| + |z_i| \rho(\eta, \zeta) \leq -b |z_i| \end{aligned}$$

## Control deslizante

$$\Rightarrow \dot{V}_i(z_i) \leq -b|z_i| = -b\sqrt{2V_i}$$

Esto asegura que  $z_i = 0$  es un invariante!!!

Aplicando el **lema de comparación** obtenemos la desigualdad

$$|z_i(t)| \leq |z_i(0)| - bt \quad , \quad t \geq 0$$

que implica que la trayectoria alcanza la superficie  $z_i = 0$  en un tiempo finito, menor que  $\frac{|z_i(0)|}{b}$ .

## Control deslizante

### Resumiendo

Con la señal de control diseñada, tenemos

- una primera etapa de *llegar* a la superficie  $z = 0$ ;
- una segunda etapa de *mantenernos* en dicha superficie, y converger a  $\eta = 0$ , de acuerdo a la dinámica equivalente que diseñamos.

Para ello hay que:

- diseñar la *superficie deslizante*  $\zeta = \Phi(\eta)$ ;
- estimar  $\rho$  y  $k$ ;
- construir el control  $u = u_{eq} + v$ , con el *control equivalente* y la señal conmutada.

## Ejemplo

## Péndulo forzado con fricción

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \bar{\theta}) - bx_2 + cu \end{cases}$$

**Objetivo:** estabilizar el sistema en el ángulo  $\bar{\theta}$  (el origen debe ser un atractor).

Supongamos que conocemos los valores nominales  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$ , y definamos

$$\delta(x, u) = \frac{1}{\hat{c}} \left[ -(a - \hat{a}) \sin(x_1 + \bar{\theta}) - (b - \hat{b})x_2 + (c - \hat{c})u \right]$$

El sistema queda así:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\hat{a} \sin(x_1 + \bar{\theta}) - \hat{b}x_2 + \hat{c} [u + \delta(x, u)] \end{cases}$$

## Ejemplo

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Diseñamos la realimentación estabilizante  $x_2 = \Phi(x_1) = -\mu x_1$ , con  $\mu > 0$ .

$$\dot{z} = v + \Delta(x_1, x_2, v)$$

La **superficie deslizante** es  $z = x_2 + \mu x_1 = 0$  y el **control equivalente** es

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{c}} \left[ \hat{a} \sin(x_1 + \bar{\theta}) + \hat{b}x_2 - \mu x_2 \right] \quad (\dot{z} = 0)$$

$$\Delta(x_1, x_2, v) = -(a - \hat{a}) \sin(x_1 + \bar{\theta}) - (b - \hat{b})x_2 + (c - \hat{c}) \left( u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}} \right)$$



## Ejemplo

## Cotas para la perturbación

$$\|\Delta\| \leq \rho(x) + k|v|$$

$$\rho(x) = k_1 + k_2|x_2| \quad , \quad k_1 \geq \left| \frac{c\hat{a} - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| \quad , \quad k_2 \geq \left| \frac{c\hat{b} - b\hat{c}}{\hat{c}} - \mu \left( \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) \right|$$

$$1 \geq k \geq \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right|$$

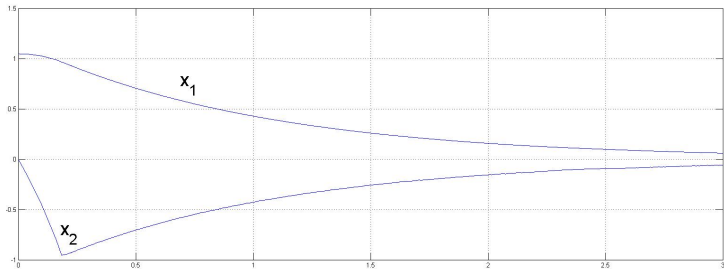
## Control deslizante

$$u = u_{eq} + \frac{\rho(x) + b_0}{\hat{c}(1 - k)} \cdot sg(x_2 + \mu x_1)$$

Control suavizado, para evitar el *chattering*

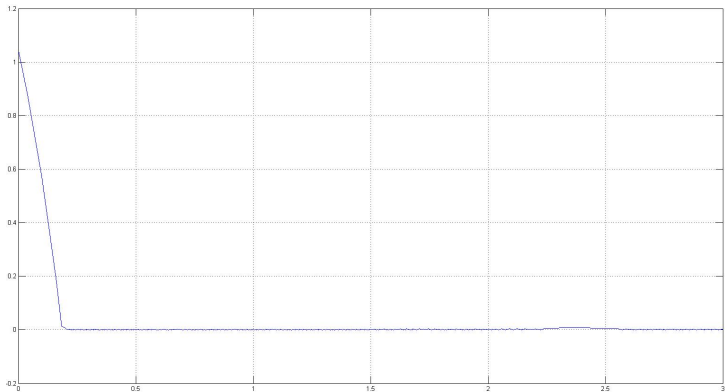
$$u_s = u_{eq} + \frac{\rho(x) + b_0}{\hat{c}(1 - k)} \cdot sat \left( \frac{x_2 + \mu x_1}{\epsilon} \right)$$

## Ejemplo

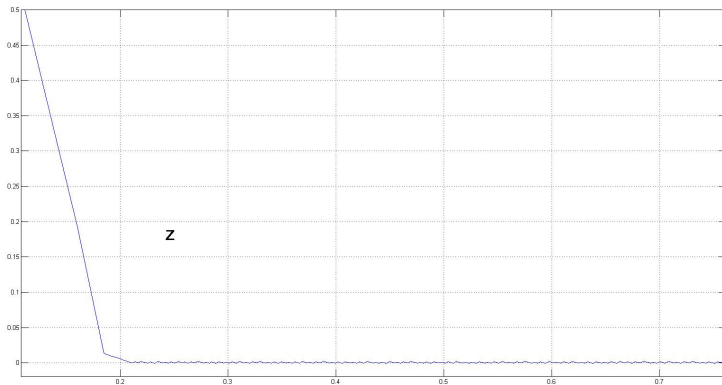
Simulaciones: ( $x_1, x_2$ )

# Ejemplo

## Simulaciones: $z$

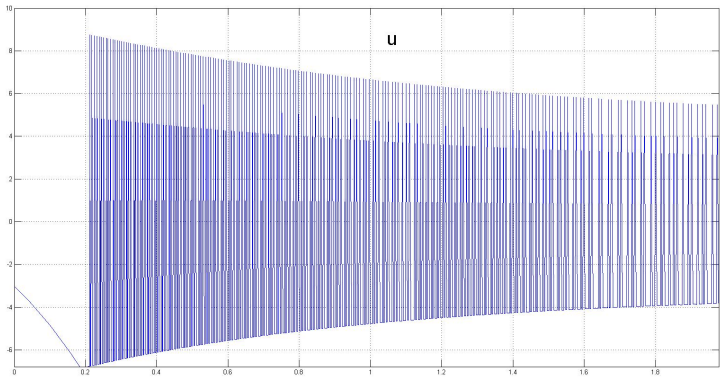


## Ejemplo

Simulaciones:  $z$  (detalle)

# Ejemplo

## Simulaciones: señal de control



## Ejemplo

Consideremos este sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  desconocidos, pero tales que  $|\theta_1| \leq a$ ,  $|\theta_2| \leq b$ .

### Primer enfoque: backstepping

- vemos los términos  $\delta_1 = \theta_1 x_1 \sin(x_2)$  y  $\delta_2 = \theta_2 x_2^2$  como perturbaciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u\end{aligned}$$

- Ponemos  $x_2 = -kx_1$  y estabilizamos la primer dinámica. Tenemos la función de Lyapunov  $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$ .

## Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  desconocidos, pero tales que  $|\theta_1| \leq a$ ,  $|\theta_2| \leq b$ .

## Primer enfoque: backstepping

- Derivamos respecto del sistema perturbado:

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 + \theta_1 x_1^2 \sin(x_2) \leq -(k_1 - a)x_1^2 \Rightarrow k_1 > a$$

- Elegimos  $k_1 = 1 + a$  y diseñamos el control

$$u = -2x_1 - k_1 x_2 - k(x_2 + k_1 x_1) \quad , \quad V(x) = \frac{1}{2} [x_1^2 + (x_2 + kx_1)^2]$$

con  $k$  a definir.

## Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  desconocidos, pero tales que  $|\theta_1| \leq a$ ,  $|\theta_2| \leq b$ .

### Segundo enfoque: sliding control

- Consideramos el sistema  $\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2)$  y elegimos la realimentación  $x_2 = -(1+a)x_1$ , que estabiliza, como permite ver la función de Lyapunov  $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$ .
- $\dot{V}(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = -(1+a)x_1^2 + \theta_1 x_1^2 \sin(x_2) \leq -x_1^2$
- La superficie deslizante es:

$$z = x_2 + (1+a)x_1 = 0$$



## Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  desconocidos, pero tales que  $|\theta_1| \leq a$ ,  $|\theta_2| \leq b$ .

## Segundo enfoque: sliding control

- La superficie deslizante es:  $z = x_2 + (1 + a)x_1 = 0$ . La derivada es

$$\dot{z} = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u + (1 + a)(x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2))$$

- El *control equivalente* es  $u_{eq} = -x_1 - (1 + a)x_2$  y  $u = u_{eq} + v$  nos lleva a

$$\dot{z} = v + \theta_2 x_2^2 + (1 + a)\theta_1 x_1 \sin(x_2) = v + \Delta(x)$$

## Ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  desconocidos, pero tales que  $|\theta_1| \leq a$ ,  $|\theta_2| \leq b$ .

## Segundo enfoque: sliding control

- $\dot{z} = v + \theta_2 x_2^2 + (1 + a)\theta_1 x_1 \sin(x_2) = v + \Delta(x)$ .
- $|\Delta(x)| \leq a(1 + a)|x_1| + b x_2^2 = \rho(x)$ .
- Definamos  $b_0 > 0$ .
- El controlador deslizante es  $u = u_{eq} - (\rho(x) + b_0) \operatorname{sgn}(z)$

## Comentarios

- La excesiva conmutación de la entrada puede no ser admisible, por lo que se puede usar la estrategia de suavizado ya vista en el rediseño.
- Esto puede llevar a la convergencia hacia una *banda* donde el sistema desliza.
- Valen también los comentarios sobre la existencia y unicidad de soluciones para sistemas con lado derecho discontinuo (teoría de Filippov).

## Resumen

## Péndulo forzado con fricción

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \bar{\theta}) - bx_2 + cu \end{cases}$$

## Controladores

- Linealización Jacobiana:

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}} \sin(\bar{\theta}) + k_1 x_1 + k_2 x_2$$

- Linealización exacta

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}} [\sin(x_1 + \bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})] + \frac{1}{\hat{c}} (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

## Resumen

## Controladores

- Lyapunov redesign

$$u = \frac{\hat{a}}{\hat{c}} [\sin(x_1 + \bar{\theta})] + \frac{1}{\hat{c}}(k_1 x_1 + k_2 x_2) - \frac{\rho(x)}{1-k} \cdot \frac{w}{\|w\|_2}$$

- Control deslizante

$$u = \frac{1}{\hat{c}} \left[ \hat{a} \sin(x_1 + \bar{\theta}) + \hat{b} x_2 - \mu x_2 \right] + \frac{\rho(x) + b_0}{\hat{c}(1-k)} \cdot \text{sg}(x_2 + \mu x_1)$$