Función descriptiva

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2023

Contenido

Función descriptiva

- Es un procedimiento de análisis para una clase de sistemas no lineales que permite intuir la existencia o no de ciclos límites.
- No es exacto, como veremos, ya que se basa en una aproximación que simplifica el análisis.

Previo

Respuesta de un sistema lineal a una entrada sinusoidal

- Consideremos un sistema lineal de transferencia $G(j\omega)$ y una entrada $u(t) = A\sin(\omega_0 t)$.
- Sabemos que la respuesta en régimen del sistema lineal será de la forma
$$y(t) = A.|G(j\omega_0)|.\sin\left[\omega_0 t + arg\, G(j\omega_0)\right]$$
- Lo anterior se extiende a señales periódicas, a través de la serie de Fourier.

Previo

Respuesta de un sistema lineal a una entrada sinusoidal

- Si la entrada periódica es:

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{jn\omega_0 t}$$

(periodo τ, frecuencia $f_0 = \frac{1}{\tau}$, pulsación $\frac{2\pi}{\tau}$),

- su respuesta en régimen vale:

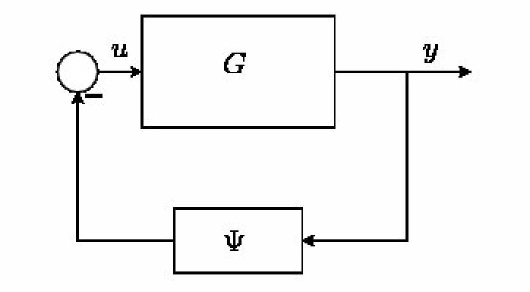
$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) G(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

- El n-ésimo coeficiente de Fourier de una señal periódica $g(t)$, de periodo τ, se calcula como

$$c_n(g) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

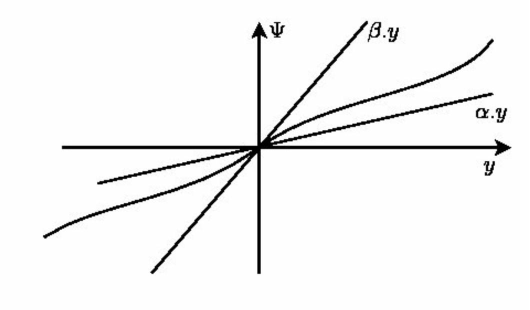
Planteo del problema

Consideramos sistemas no lineales que pueden describirse por el siguiente diagrama de bloques:



donde el sistema lineal $G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1}B$ es la transferencia de un sistema lineal SISO.

La función ψ es una no linealidad de sector $[\alpha, \beta]$:

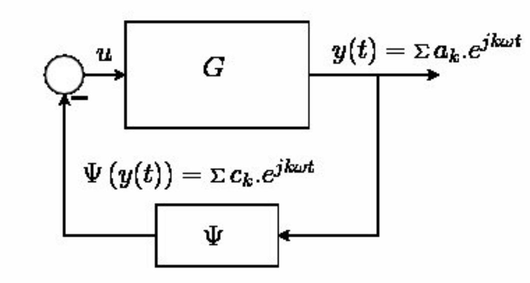


$$\alpha \leq \frac{\Psi(y)}{y} \leq \beta \Leftrightarrow \alpha.y^2 \leq y.\Psi(y) \leq \beta.y^2$$

Asumiremos también que la no linealidad es impar.

Balance de armónicos

Consideremos una respuesta periódica de pulsación ω;



donde cada c_k es función de todos los a_k.

Al ser G un sistema lineal, su respuesta en régimen verifica la siguiente relación entre los coeficientes de Fourier:

$$G(jk\omega).c_k = -a_k \;\; , \quad k \in \mathcal{Z}$$

Balance de armónicos

Para resolver el sistema de infinitas ecuaciones, vamos a plantear una simplificación, basada en la hipótesis de que $G(s)$ se comporta como un filtro pasabajos.

Hipótesis

Supongamos que el sistema lineal filtra todos los armónicos, excepto el primero

$$G(jk\omega) \approx 0\,, \quad |k| > 1$$

Entonces:

$$G(0).c_0 = a_0 \quad , \quad G(j\omega).c_1 = a_1 \quad , \quad G(-j\omega).c_{-1} = a_{-1}$$

Balance de armónicos

- Sabemos que $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$ y que $a_{-1} = \overline{a_1}$.
- Observemos que si $y(t) \approx a_0 + a.\sin(\omega t)$, entonces $a_1 = \frac{a}{2j}$.
- Supongamos $a_0 = 0$ (nos concentramos en la parte que oscila). Obtenemos el balance del primer armónico:

$$G(j\omega).c_1 + a_1 = 0 \Leftrightarrow G(j\omega).\left(\frac{c_1}{a_1}\right) + 1 = 0 \quad si\ a_1 \neq 0$$

- Definamos una suerte de ganancia:

$$\Phi(a) = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T \Psi\left(y(t)\right).e^{-j\omega t}dt}{a/2j}$$

Balance de armónicos

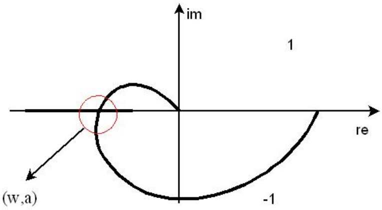
- A esta suerte de ganancia la llamaremos *función descriptiva*:

$$\Phi(a) = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T \Psi\left(a.\sin(\omega t)\right).e^{-j\omega t}dt}{a/2j}$$

- Entonces, debe ser $\boxed{G(j\omega).\Phi(a) + 1 = 0}$

Detección gráfica de oscilaciones

Si realizamos el ploteo simultáneo de $G(j\omega)$ y $-\frac{1}{\Phi(a)}$, los puntos de cortes de ambos gráficos nos darán posibles amplitudes y frecuencias de oscilación.



Parece existir una oscilación de amplitud a y pulsación ω_0.

Es factible ir más allá de la posibilidad. Ello en general requiere más hipótesis y más conocimiento del sistema (ver (Khalil, 1996) y referencias allí indicadas).

Propiedades de $\Phi(a)$

Calculemos $c_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \Psi\left(a.\sin(\omega t)\right).e^{-j\omega t}dt$:

$$c_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \Psi\left(a.\sin(\omega t)\right).\left[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right]dt$$

$$c_1 = \frac{-j}{T}\int_0^T \Psi\left(a.\sin(\omega t)\right).\sin(\omega t)dt \quad (\Psi \text{ impar})$$

Como $\Phi(a) = \frac{c_1}{a_1}$ y $a_1 = a/2j$,

$$\Phi(a) = \frac{\frac{-j}{T}\int_0^T \Psi\left(a.\sin(\omega t)\right).\sin(\omega t)dt}{a/2j} = \frac{2}{a\pi}\int_0^\pi \Psi\left(a.\sin(\theta)\right).\sin(\theta).d\theta$$

donde hemos puesto $\omega t = \frac{2\pi t}{T} = \theta$ y hemos usado la imparidad de Ψ.

Propiedades de $\Phi(a)$

$$\Phi(a) = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi} \Psi\left(a.\sin(\theta)\right).\sin(\theta).d\theta$$

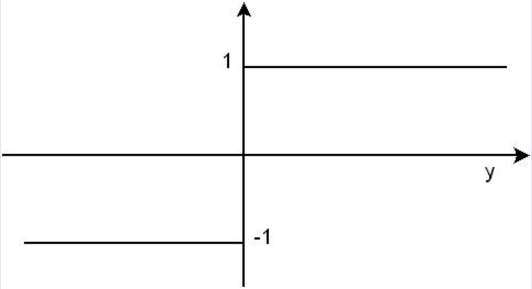
- De la expresión de $\Phi(a)$ se ve que siempre es real y no depende de ω.
- La ecuación de balance armónico $G(j\omega).\Phi(a) + 1 = 0$ queda así:

$$\begin{cases} re\left[G(j\omega)\right].\Phi(a) + 1 & = & 0 \\ im\left[G(j\omega)\right] & = & 0 \end{cases}$$

- (Ejercicio) Si $\Psi \in [\alpha, \beta]$, entonces $\alpha \leq \Phi(a) \leq \beta$.
- Dato de interés: se puede extender la idea al caso de la histéresis; la función descriptiva resulta ser compleja.

Ejemplos de $\Phi(a)$

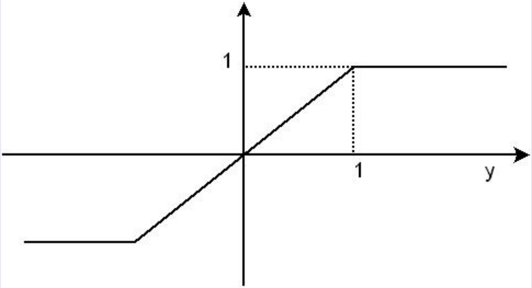
ON-OFF $\Phi(a) = \frac{4}{a\pi}$



$$\Phi(a) = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi} \Psi(a\sin(\theta)).\sin(\theta)d\theta = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta = -\frac{2}{a\pi}\cos(\theta)|_0^{\pi}$$

Ejemplos de $\Phi(a)$

Saturación $\Phi(a) = \frac{2}{\pi}.\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a}.\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right]$



Ejemplo

Ecuación de Rayleigh

Consideremos el sistema

$$\ddot{z} - \epsilon \dot{z} + z = -\frac{\epsilon}{3}\dot{z}^3$$

Puede pensarse en el contexto que vimos, con

$$G(s) = \frac{\epsilon s}{s^2 - \epsilon s + 1} \quad , \quad \Psi(y) = \frac{1}{3}y^3$$

Calculemos la función descriptiva

$$\Phi(a) = \frac{2}{a\pi}\int_0^\pi \frac{(a\sin(\theta))^3}{3}\sin(\theta)d\theta = \frac{2a^2}{3\pi}\int_0^\pi \sin(\theta)^4 d\theta = \frac{a^2}{4}$$

Ejemplo

Ecuación de Rayleigh

La condición de oscilación da

$$re\left[G(j\omega)\right] = -\frac{\epsilon^2\omega}{(1-\omega^2)^2+\epsilon^2\omega^2} = -\frac{1}{\Phi(a)}$$

$$im\left[G(j\omega)\right] = -\frac{\epsilon\omega(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+\epsilon^2\omega^2} = 0$$

- Obtenemos $\omega = 1 \Rightarrow \Phi(a) = -\frac{1}{G(j1)} = 1 \Rightarrow a = 2$.
- Concluimos que probablemente exista un ciclo límite de pulsación cercana a 1 y de amplitud cercana a 2.

Ejemplo