

Función descriptiva

Pablo Monzón

Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería-Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2025



Contenido

- 1 **Introducción**
- 2 **Balance de armónicos**
- 3 **Propiedades**
- 4 **Cálculo y ejemplos**

Función descriptiva

- Es un procedimiento de análisis para una clase de sistemas no lineales que permite **intuir** la existencia o no de ciclos límites.
- No es exacto, como veremos, ya que se basa en una aproximación que simplifica el análisis.

Respuesta de un sistema lineal a una entrada sinusoidal

- Consideremos un sistema lineal de transferencia $G(j\omega)$ y una entrada $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$.
- Sabemos que la respuesta en régimen del sistema lineal será de la forma

$$y(t) = A \cdot |G(j\omega_0)| \cdot \sin[\omega_0 t + \arg G(j\omega_0)]$$

- Lo anterior se extiende a señales periódicas, a través de la serie de Fourier.

Respuesta de un sistema lineal a una entrada sinusoidal

- Si la entrada periódica es:

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{jn\omega_0 t}$$

(periodo τ , frecuencia $f_0 = \frac{1}{\tau}$, pulsación $\frac{2\pi}{\tau}$),

- su respuesta en régimen vale:

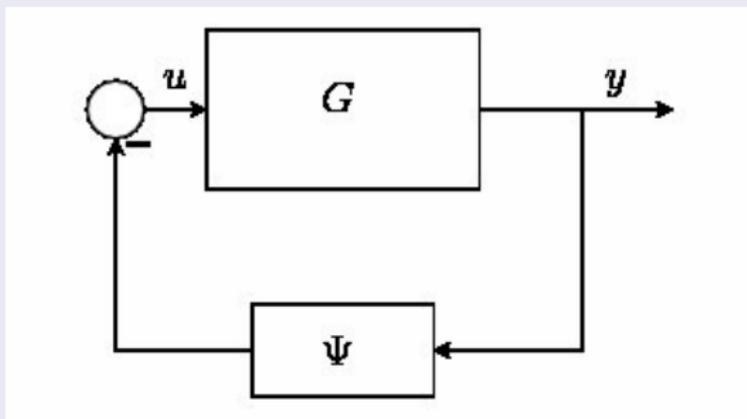
$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) G(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

- El n -ésimo coeficiente de Fourier de una señal periódica $g(t)$, de periodo τ , se calcula como

$$c_n(g) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

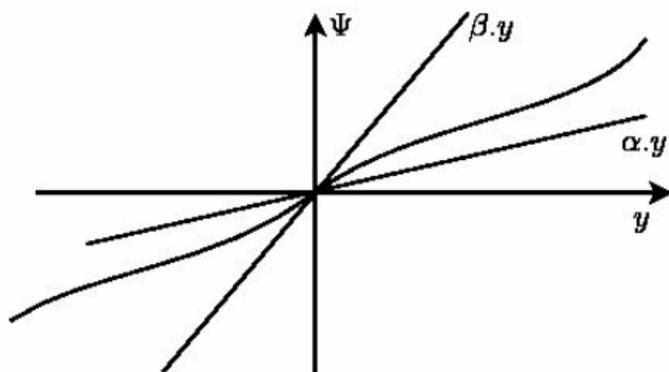
Planteo del problema

Consideramos sistemas no lineales que pueden describirse por el siguiente diagrama de bloques:



donde el sistema lineal $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ es la transferencia de un sistema lineal SISO.

La función ψ es una **no linealidad de sector** $[\alpha, \beta]$:

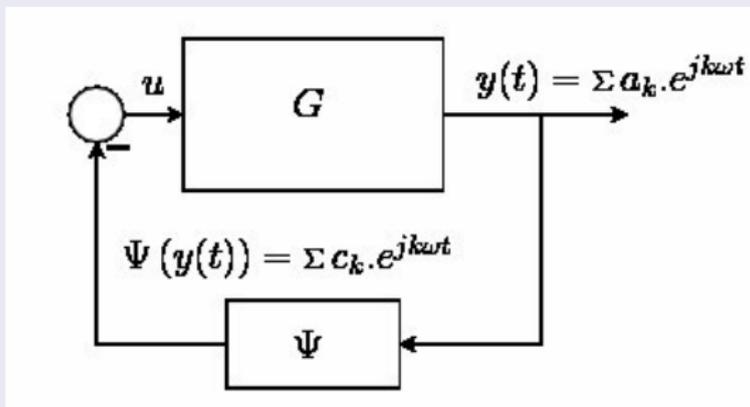


$$\alpha \leq \frac{\Psi(y)}{y} \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot y^2 \leq y \cdot \Psi(y) \leq \beta \cdot y^2$$

Asumiremos también que la no linealidad es **impar**.

Balance de armónicos

Consideremos una respuesta periódica de pulsación ω ;



donde **cada** c_k es función de **todos** los a_k .

Al ser G un sistema lineal, su respuesta en régimen verifica la siguiente relación entre los coeficientes de Fourier:

$$G(jk\omega) \cdot c_k = -a_k, \quad k \in \mathcal{Z}$$

Balance de armónicos

Para resolver el sistema de infinitas ecuaciones, vamos a plantear una simplificación, basada en la hipótesis de que $G(s)$ se comporta como un filtro pasabajos.

Hipótesis

Supongamos que el sistema lineal filtra todos los armónicos, excepto el primero

$$G(jk\omega) \approx 0, \quad |k| > 1$$

Entonces:

$$G(0).c_0 = a_0 \quad , \quad G(j\omega).c_1 = a_1 \quad , \quad G(-j\omega).c_{-1} = a_{-1}$$

Balance de armónicos

- Sabemos que $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$ y que $a_{-1} = \overline{a_1}$.
- Observemos que si $y(t) \approx a_0 + a \cdot \sin(\omega t)$, entonces $a_1 = \frac{a}{2j}$.
- Supongamos $a_0 = 0$ (nos concentramos en la parte que oscila).
Obtenemos el balance del primer armónico:

$$G(j\omega) \cdot c_1 + a_1 = 0 \Leftrightarrow G(j\omega) \cdot \left(\frac{c_1}{a_1} \right) + 1 = 0 \quad \text{si } a_1 \neq 0$$

- Definamos una suerte de **ganancia**:

$$\Phi(a) = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \Psi(y(t)) \cdot e^{-j\omega t} dt}{a/2j}$$

Balance de armónicos

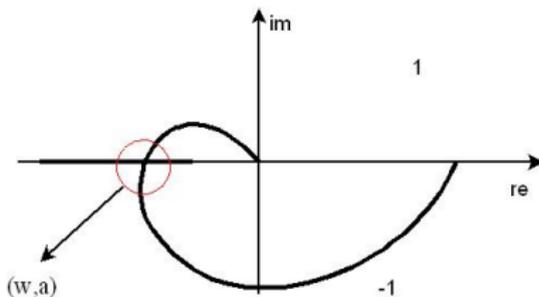
- A esta suerte de **ganancia** la llamaremos *función descriptiva*:

$$\Phi(a) = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \Psi(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot e^{-j\omega t} dt}{a/2j}$$

- Entonces, debe ser $G(j\omega) \cdot \Phi(a) + 1 = 0$

Detección gráfica de oscilaciones

Si realizamos el ploteo simultáneo de $G(j\omega)$ y $-\frac{1}{\Phi(a)}$, los puntos de cortes de ambos gráficos nos darán **posibles** amplitudes y frecuencias de oscilación.



Parece existir una oscilación de amplitud a y pulsación ω_0 .

Es factible ir más allá de la **posibilidad**. Ello en general requiere más hipótesis y más conocimiento del sistema (ver (Khalil, 1996) y referencias allí indicadas).

Propiedades de $\Phi(a)$

Calculemos $c_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot e^{-j\omega t} dt$:

$$c_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt$$

$$c_1 = \frac{-j}{T} \int_0^T \Psi(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot \sin(\omega t) dt \quad (\Psi \text{ impar})$$

Como $\Phi(a) = \frac{c_1}{a_1}$ y $a_1 = a/2j$,

$$\Phi(a) = \frac{\frac{-j}{T} \int_0^T \Psi(a \cdot \sin(\omega t)) \cdot \sin(\omega t) dt}{a/2j} = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \Psi(a \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$$

donde hemos puesto $\omega t = \frac{2\pi t}{T} = \theta$ y hemos usado la imparidad de Ψ .

Propiedades de $\Phi(a)$

$$\Phi(a) = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \Psi(a \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$$

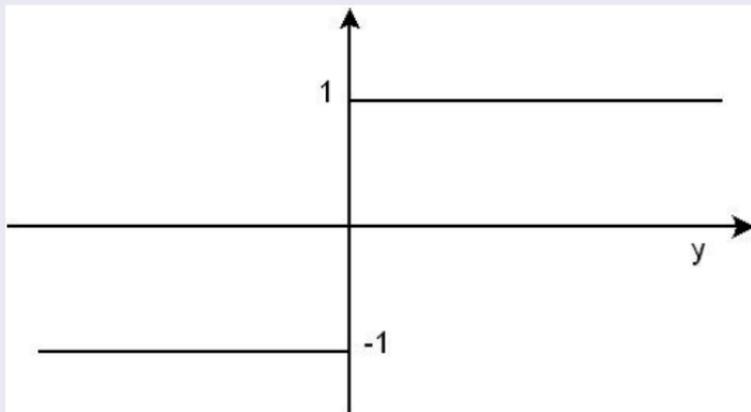
- De la expresión de $\Phi(a)$ se ve que siempre es **real** y no depende de ω .
- La ecuación de balance armónico $G(j\omega) \cdot \Phi(a) + 1 = 0$ queda así:

$$\begin{cases} \text{re}[G(j\omega)] \cdot \Phi(a) + 1 & = & 0 \\ \text{im}[G(j\omega)] & = & 0 \end{cases}$$

- (Ejercicio) Si $\Psi \in [\alpha, \beta]$, entonces $\alpha \leq \Phi(a) \leq \beta$.
- Dato de interés: se puede extender la idea al caso de la histéresis; la función descriptiva resulta ser compleja.

Ejemplos de $\Phi(a)$

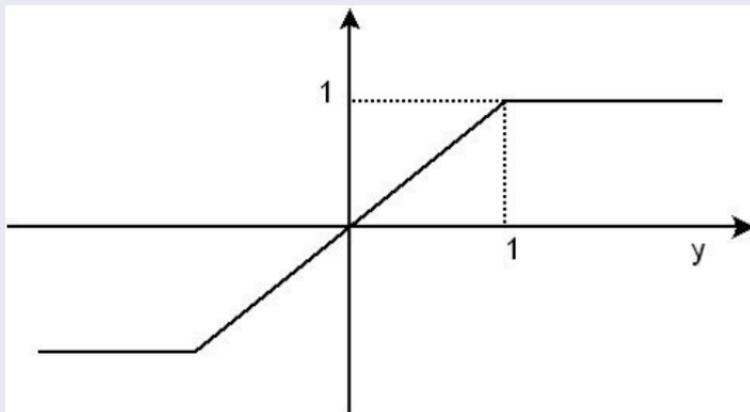
ON-OFF $\Phi(a) = \frac{4}{a\pi}$



$$\Phi(a) = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \Psi(a \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = -\frac{2}{a\pi} \cos(\theta) \Big|_0^\pi$$

Ejemplos de $\Phi(a)$

$$\text{Saturación } \Phi(a) = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{a} \right) + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right]$$



Ejemplo

Ecuación de Rayleigh

Consideremos el sistema

$$\ddot{z} - \epsilon \dot{z} + z = -\frac{\epsilon}{3} \dot{z}^3$$

Puede pensarse en el contexto que vimos, con

$$G(s) = \frac{\epsilon s}{s^2 - \epsilon s + 1} \quad , \quad \Psi(y) = \frac{1}{3} y^3$$

Calculemos la función descriptiva

$$\Phi(a) = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \frac{(a \sin(\theta))^3}{3} \sin(\theta) d\theta = \frac{2a^2}{3\pi} \int_0^\pi \sin(\theta)^4 d\theta = \frac{a^2}{4}$$

Ejemplo

Ecuación de Rayleigh

La condición de oscilación da

$$re [G(j\omega)] = -\frac{\epsilon^2\omega}{(1-\omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2} = -\frac{1}{\Phi(a)}$$

$$im [G(j\omega)] = -\frac{\epsilon\omega(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2} = 0$$

- Obtenemos $\omega = 1 \Rightarrow \Phi(a) = -\frac{1}{G(j1)} = 1 \Rightarrow a = 2$.
- Concluimos que probablemente exista un ciclo límite de pulsación cercana a 1 y de amplitud cercana a 2.

Ejemplo

