Estabilidad absoluta

Pablo Monzón

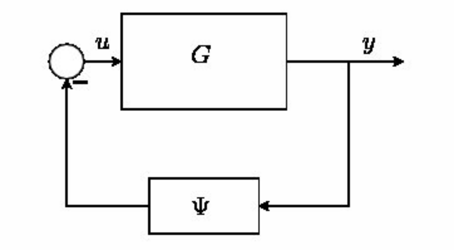
Departamento de Sistemas y Control
Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE)
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Uruguay

Análisis y control de sistemas no lineales
Primer semestre - 2025

Contenido

Introducción

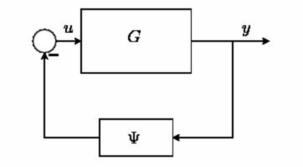
- Escribimos el sistema como un sistema lineal SISO en el camino *directo* y una no linealidad en la *realimentación*.



- También puede verse como el análisis de un sistema lineal con realimentación no lineal de estados.
- $\Psi(0) = 0$ para *preservar* el origen como punto de equilibrio.

Ejemplo

Saturación

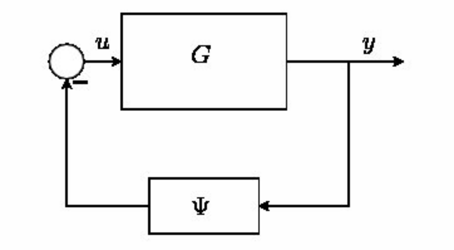


$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + u \\ y & = & 2x_1 + x_2 \\ u & = & -sat(y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] u \\ y & = & \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}\right] x \\ u & = & -sat(y) \end{array}\right.$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \quad , \quad \Psi(y) = sat(y)$$

Ejemplo

Ecuación de Rayleigh



$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 + \epsilon z_2 - \frac{1}{3}\epsilon z_2^3 \end{cases}$$

Tomando $y = z_2$,

$$G(s) = \frac{\epsilon s}{s^2 - \epsilon s + 1} \quad , \quad \Phi(y) = \frac{1}{3}y^3$$

(verificarlo, hallando las matrices A, B y C).

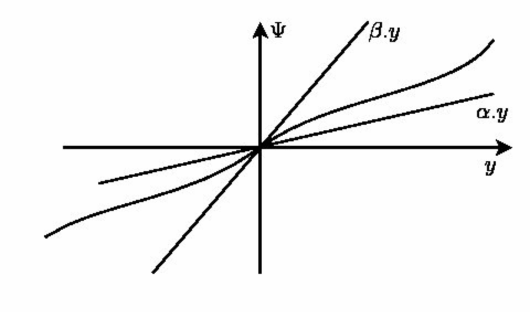
No linealidad de sector

Definición

Dados α, β números reales, decimos que la no linealidad Ψ pertenece al sector $[\alpha, \beta]$ si

$$\alpha \leq \frac{\Psi(y)}{y} \leq \beta \Leftrightarrow \alpha.y^2 \leq y.\Psi(y) \leq \beta.y^2 \Leftrightarrow [\Psi(y) - \alpha.y].[\Psi(y) - \beta.y] \leq 0$$

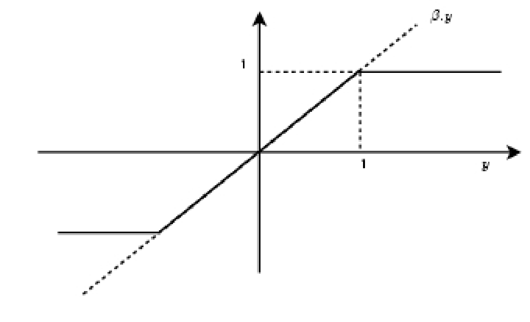
Notación: $\Psi \in [\alpha, \beta]$



No linealidad de sector

Ejemplos

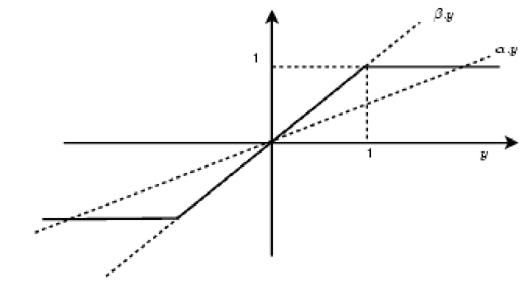
Saturación: $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 1$.



No linealidad de sector

Ejemplos

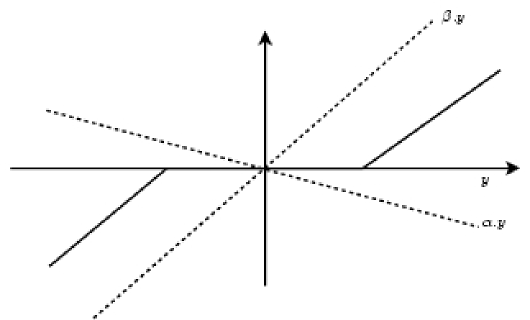
Saturación con $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$. Decimos que $\Psi \in [\alpha, \beta]$ *en un dominio finito*.



No linealidad de sector

Ejemplos

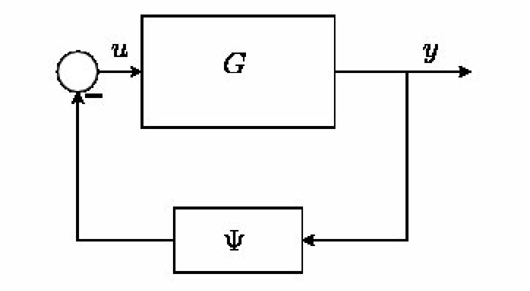
Dead zone: $\alpha \leq 0$, $\beta > 0$.



Definición

Estabilidad absoluta (*Lur'e problem*)

El origen es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para toda no linealidad Ψ en el sector $[\alpha, \beta]$.



Si el sector es de dominio finito, entonces hablamos de estabilidad asintótica local.

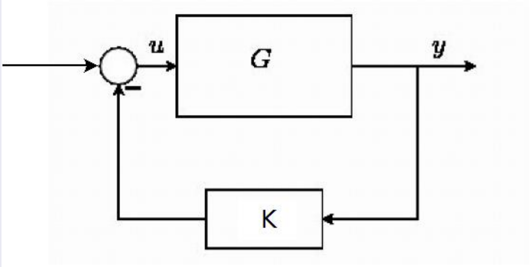
Hipótesis generales de trabajo

- Trabajaremos con sistemas SISO, aunque algunos resultados pueden extenderse al caso MIMO.
- Asumiremos que tenemos una realización *minimal* de $G(s)$, es decir, que tenemos (A, B) controlable y (A, C) observable.
- También asumiremos que la parte lineal satisface $D = 0$ (no hay transferencia directa desde la entrada a la salida).

Conjeturas (falsas)

Aizerman

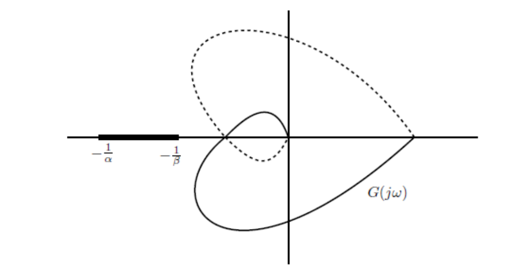
- Estabilidad absoluta equivale a que el sistema lineal se estabiliza para toda realimentación constante $K \in [\alpha, \beta]$.



Conjeturas (falsas)

Aizerman

- En términos del Diagrama de Nyquist de $G(s)$:



Conjeturas (falsas)

Kalman

- El sistema lineal se estabiliza para toda realimentación constante K con

$$\alpha \leq \frac{\partial \Psi}{\partial y}(y) \leq \beta$$

Criterio del círculo

Función de Lyapunov candidata cuadrática

- Buscamos una función de Lyapunov cuadrática, de la forma

$$V(x) = x^T P x \quad , \quad P = P^T > 0$$

- Por el momento asumiremos que $\alpha = 0$. Por lo tanto, $G(s)$ debe ser estable.
- La derivada de V a lo largo de las trayectorias resulta ser

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$$

$$= x^T (A^T P + PA) x + u^T B^T P x + x^T P B u =$$

$$x^T (A^T P + PA) x + 2 x^T P B u$$

Criterio del círculo

Función candidata cuadrática

- Como $u = -\Psi(y)$, queda

$$\dot{V}(x) = x^T(A^TP + PA)x - 2x^TPB\Psi(y)$$

- Sumamos el término positivo

$$-2\Psi(y).[\Psi(y) - \beta.y] = -2\Psi(y).[\Psi(y) - \beta.Cx] \geq 0$$

Obtenemos

$$\dot{V}(x) \leq x^T(A^TP + PA)x - 2x^TPB\Psi(y) - 2\Psi(y).[\Psi(y) - \beta.Cx]$$

$\Rightarrow$

Criterio del círculo

Función candidata cuadrática

$$\dot{V}(x) \leq x^T(A^TP + PA)x + 2x^T[\beta C^T - PB]\Psi(y) - 2\Psi^2(y)$$

Si existen $P > 0$, $\epsilon > 0$ y L tales que

$$\begin{aligned} A^TP + PA &= -L^TL - \epsilon P \\ PB &= \beta C^T - \sqrt{2}L^T \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon x^TPx - x^TL^TLx + 2\sqrt{2}x^TL^T\Psi(y) - 2\Psi^2(y)$$

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon x^TPx - \|Lx - \sqrt{2}\Psi(y)\|^2 \leq -\epsilon x^TPx$$

V resulta ser una función de Lyapunov global para el sistema no lineal.

Criterio del círculo

Queremos

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -L^T L - \epsilon P \\ PB &= \beta C^T - \sqrt{2} L^T \end{aligned}$$

Recordemos KYP

- Sea $Z(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ controlable, observable, real positiva y $\mathcal{A}$ Hurwitz.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^T P + P\mathcal{A} = -L^T L - \epsilon P \quad &, \quad P\mathcal{B} = \mathcal{C}^T - L^T W \\ W^T W = \mathcal{D} + \mathcal{D}^T & \end{aligned}$$

Función de Lyapunov cuadrática

Aplicamos KYP, con $\mathcal{A} = A$, $\mathcal{B} = B$, $\mathcal{C} = \beta C$ y $\mathcal{D} = 1$.

Criterio del círculo

Función de Lyapunov cuadrática

- $\mathcal{A} = A$, $\mathcal{B} = B$, $\mathcal{C} = \beta C$ y $\mathcal{D} = 1$.
- Hallamos la transferencia

$$Z(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + D = \beta C(sI - A)^{-1}B + 1 = 1 + \beta G(s)$$

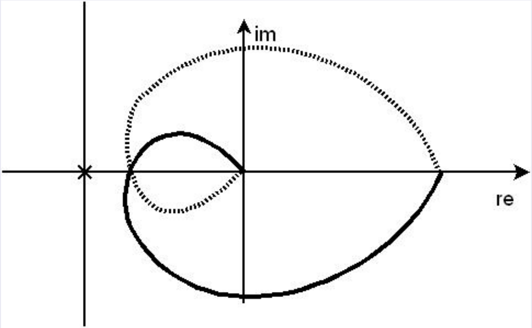
- (A, B) debe ser controlable, $(A, \beta C)$ debe ser observable
- la función $Z(s) = 1 + \beta.G(s)$ debe ser estrictamente real positiva.

$$re\left[G(j\omega)\right] > -\frac{1}{\beta} \qquad (\alpha = 0)$$

Criterio del círculo

Análisis gráfico ($\alpha = 0$)

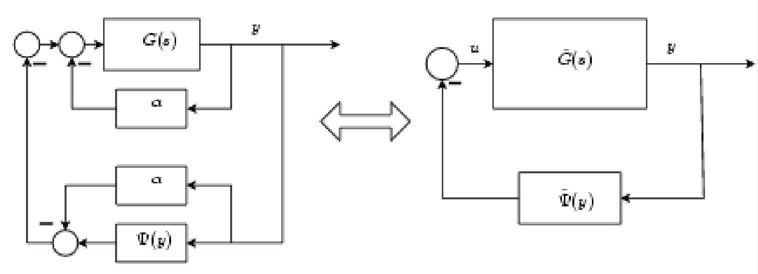
El Diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ debe estar a la derecha de la recta vertical por $-\frac{1}{\beta}$.



Observar que existe naturalmente un β máximo *admisible*.

Criterio del círculo

$\alpha \neq 0$



$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1+\alpha G(s)} \quad , \quad \tilde{\Psi}(y) = \Psi(y) - \alpha y \in [0, \beta - \alpha]$$

Aplicamos lo ya visto. Entonces $\tilde{G}$ debe ser estable y

$$1 + (\beta - \alpha)\tilde{G}(s) = 1 + (\beta - \alpha)\frac{G(s)}{1+\alpha G(s)} \quad \text{real positiva}$$

Criterio del círculo

$\alpha \neq 0$

- $\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1+\alpha G(s)}$ estable si el Nyquist de G encierra al punto $-\frac{1}{\alpha}$ la cantidad de vueltas necesarias.
- $1 + (\beta - \alpha)\tilde{G}(s)$ real positiva:

$$re\left[1 + (\beta - \alpha)\frac{G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)}\right] = re\left[\frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)}\right] > 0 \ , \ \forall \omega$$

Criterio del círculo

$\alpha \neq 0$, α positivo

Caso $0 < \alpha < \beta$. G puede ser inestable.

$$re\left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)}\right] > 0 \ , \ \forall\omega$$

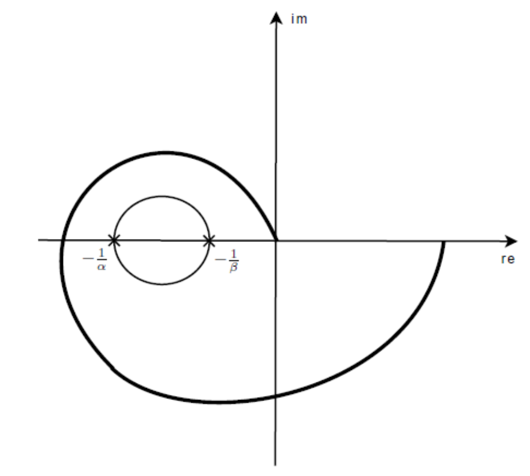
$$arg\left[\frac{1}{\beta} + G(j\omega)\right] - arg\left[\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)\right] \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \forall\omega$$

El punto $G(j\omega)$ ve el segmento $\left[-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}\right]$ bajo un ángulo agudo.

El Nyquist de G debe estar fuera del círculo de diámetro $\left[-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}\right]$.

Criterio del círculo

Análisis gráfico ($\alpha > 0$)



Criterio del círculo

$\alpha \neq 0$, α negativo

Caso $\alpha < 0 < \beta$. G debe ser estable.

$$re\left[\frac{\frac{1}{\beta}+G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha}+G(j\omega)}\right] < 0 \ , \ \forall\omega$$

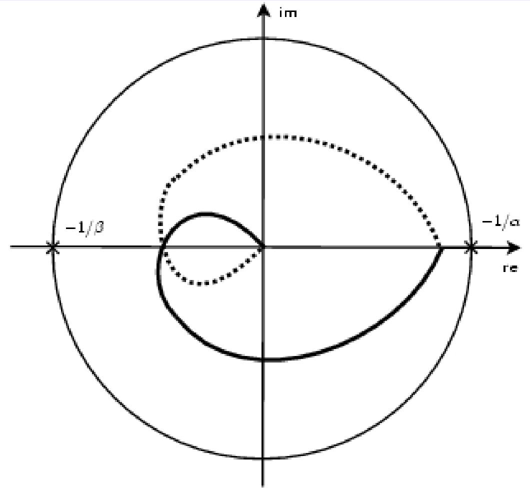
$$arg\left[\frac{1}{\beta}+G(j\omega)\right] - arg\left[\frac{1}{\alpha}+G(j\omega)\right] \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \ , \ \forall\omega$$

El punto $G(j\omega)$ ve el segmento $\left[-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\beta}\right]$ bajo un ángulo obtuso.

El Nyquist de G debe estar dentro del círculo de diámetro $\left[-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\beta}\right]$.

Criterio del círculo

Análisis gráfico ($\alpha < 0$)

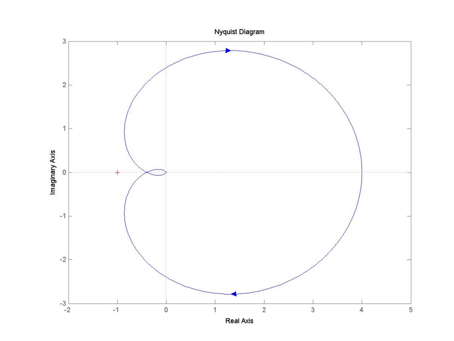


Criterio del círculo

Ejemplo (Khalil, pág. 413)

$$G(s) = \frac{24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Es estable, así que α puede ser negativo. El Diagrama de Nyquist es

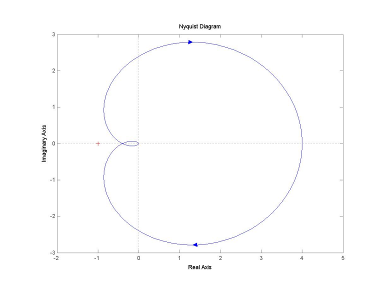


Criterio del círculo y conjetura de Aizerman

- No alcanza con no tocar o encerrar el segmento $[-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}]$.
- Hay que contemplar todo el círculo que tiene como diámetro ese segmento.
- Ejercicio: buscar contraejemplos de Aizerman y Kalman.

Criterio del círculo

Ejemplo (Khalil, pág. 413)



El sistema será absolutamente estable para no linealidades en sectores como

- : [-0.25+ϵ,0.25+ϵ]
- : [-0.23,0.71]
- : [0,1.16] (incluye la saturación).

Criterio del círculo

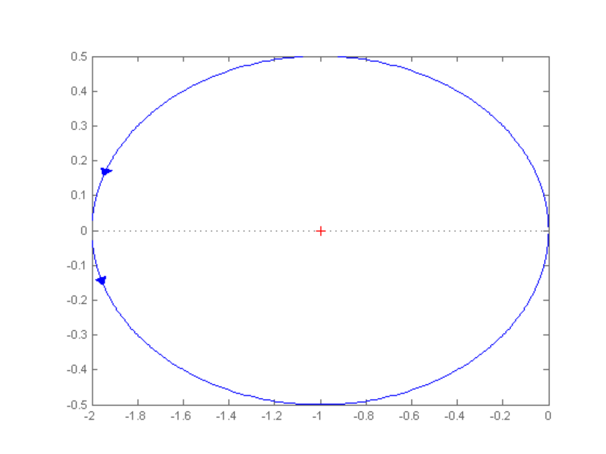
Retomemos el ejemplo de la saturación

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & x_2\\ \dot{x}_2 & = & x_1+u\\ y & = & 2x_1+x_2\\ u & = & -sat(y)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y & = & \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x\\ u & = & -sat(y)\end{array}\right.$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \quad , \quad \Phi(y)=sat(y)$$

Criterio del círculo

Diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega-1)}$



$$P = 1 \quad , \quad N \,\text{debe ser}\, = -1$$

Criterio del círculo

Diagrama de Nyquist de $G(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega-1)}$

- Como G inestable, α debe ser positivo.
- La estabilidad absoluta a la que lleguemos por este camino, para la saturación, será en dominio finito
- Debemos meter un círculo dentro del Nyquist.
- Ver en Khalil diferentes sectores para los que hay estabilidad absoluta.

Criterio del círculo

Otro ejemplo $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

- Como G inestable por tener un polo en el origen, por lo que α debe ser positivo.
- $G_\alpha(s) = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1+\alpha\frac{1}{s(s+1)}} = \frac{1}{s^2+s+\alpha}$ debe ser estable.
- Es estable para todo $\alpha > 0$ arbitrariamente pequeño.
- Un modelo en variable de estados para $G_\alpha(s)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ \Psi(y) \in [0, \beta-\alpha]$$

Criterio del círculo

Otro ejemplo $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

- Definiendo $k = \beta - \alpha$, el Diagrama de Nyquist de $G_\alpha(s)$ debe quedar a la derecha de la recta vertical por $-1/k$.
- Esto impone la condición

$$\frac{1}{k} + \frac{\alpha - \omega^2}{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2} > 0 \quad \forall \omega \Rightarrow k < 1 + 2\sqrt{\alpha}$$

- Tenemos entonces estabilidad absoluta en el sector $[\alpha, 1 + \alpha + 2\sqrt{\alpha} - \epsilon]$, con $\alpha > 0$ y $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeños.

Criterio de Popov

- Nos restringimos al caso $\alpha = 0$ ($k = \beta - \alpha$). Buscamos una función más general que la anterior:

$$V(x) = x^T P x + 2\eta \int_0^y k\Psi(\sigma)d\sigma$$

donde $P = P^T > 0$ y $\eta \geq 0$ son parámetros a elegir.

- Derivamos sobre las trayectorias:

$$\frac{d\left(x^T P x\right)}{dt} = x^T(A^T P + PA)x - 2x^T PB\Psi(y)$$

$$\frac{d\left(\int_0^{y=Cx} \Psi(\sigma)d\sigma\right)}{dt} = \Psi(y)C[Ax - B\Psi(y)]$$

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x - 2x^T PB\Psi(y) + 2\eta k\Psi(y)C[Ax - B\Psi(y)]$$

Criterio de Popov

Nuevamente sumamos el término no negativo

$$-2\Psi(y).[\Psi(y) - ky] = -2\Psi(y).[\Psi(y) - kCx]$$

y agrupamos términos:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^TP + PA)x - 2x^T[PB - \eta kA^TC^T - kC^T]\Psi(y)$$

$$-2\Psi^2(y)[1 + \eta kCB]$$

Elijamos $\eta \geq 0$ que haga

$$0 < 2[1 + \eta kCB]$$

(ver que siempre es posible)

Criterio de Popov

Definamos

$$W^2 = 2[1 + \eta k C B]$$

Al igual que antes, completamos cuadrados usando el Lema KYP. Supongamos que existen $P > 0$, $\epsilon > 0$, W y L tales que

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -L^T L - \epsilon P \\ PB &= kC^T + \eta k A^T C^T - L^T W \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{V}(x) = -\epsilon x^T P x - [Lx - W\Psi(y)]^T [Lx - W\Psi(y)] \leq -\epsilon x^T P x$$

Criterio de Popov

Para poder aplicar KYP, se debe cumplir que la siguiente transferencia sea real positiva

$$Z(s) = 1 + (1 + \eta s)kG(s)$$

siendo Z la transferencia correspondiente a la realización en variables de estados de matrices:

$$\mathcal{A} = A \ , \ \mathcal{B} = B \ , \ \mathcal{C} = kC(I + \eta A) \ , \ \mathcal{D} = 1 + \eta kCB$$

Obs: la pareja $(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = (A, kC(I + \eta A))$ debe ser observable (alcanza con evitar que $-\eta^{-1}$ sea autovalor de A).

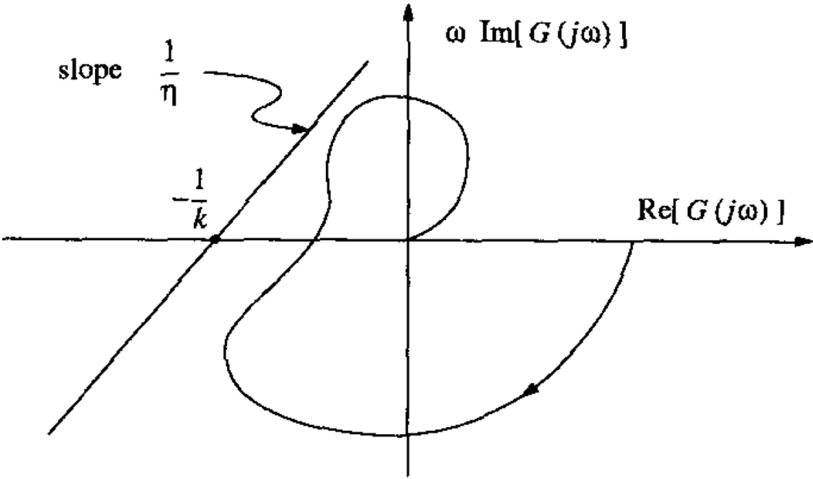
Criterio de Popov

- Debe ser

$$\frac{1}{k} + re\left[G(j\omega)\right] - \eta\omega.im\left[G(j\omega)\right] > 0 \quad , \quad \forall\omega$$

- Se obtiene una representación gráfica donde se plotea $y = \omega.im\left[G(j\omega)\right]$ contra $x = re\left[G(j\omega)\right]$ (contorno de Popov o Popov plot).
- El contorno de Popov debe estar debajo de la recta que pasa por el punto $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$ y tiene pendiente $1/\eta$.

Criterio de Popov



Contorno de Popov (Khalil)

Criterio de Popov

Ejemplo (Khalil, pág. 422)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow G_\alpha(s) = \frac{1}{s(s+1)+\alpha}$$

Entonces, aplicando Popov, para tener estabilidad absoluta debe cumplirse que:

$$\frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{\alpha(\eta-1)\omega^2}{(\alpha-\omega^2)^2+\omega^2} > 0 \quad , \quad \forall\omega$$

Tomando $\eta \geq 1$, sirve $\alpha \to 0$ y $\beta \to +\infty$ (comparar con lo obtenido aplicando el Criterio del Círculo).