Lógica de predicados. Completitud

Lógica

Corrección

- $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$.
- Significa que las derivaciones expresan una consecuencia lógica.
- Establece una correspondencia tal que partiendo de nociones sintácticas (derivaciones) se llega a nociones semánticas (los modelos de Γ son modelos de φ)
- Se demuestra por inducción sobre $\mathtt{DER}_P$

Corrección del cálculo de predicados

Significado

- La corrección de un cálculo indica que las reglas de construcción de sus juicios reflejan nociones semánticas. Un cálculo es correcto para una semántica.

  Sean $\Gamma \subseteq \texttt{FORM}$ y $\alpha \in \texttt{FORM}$

  $$\text{si } \Gamma \vdash \alpha \text{ entonces } \Gamma \models \alpha$$

Corrección

En la práctica

- Proporciona formas de mostrar una consecuencia semántica. En particular, otra forma de mostrar que una fórmula es verdad lógica.

$$\text{si } \vdash \varphi \text{ entonces } \models \varphi$$

- Proporciona formas de mostrar cuando no se cumple una consecuencia sintáctica. En particular, una forma de mostrar que una fórmula no es teorema.

$$\text{si } \not\models \varphi \text{ entonces } \nvdash \varphi$$

Demostración (parcial)

Estructura General

$$\Gamma \vdash \alpha$$

$$\Rightarrow \text{(Def.)}$$

$$(\bar{\exists} D \in \mathtt{DER}_P) H(D) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D) = \alpha$$

$$\Rightarrow (???)$$

$$\Gamma \models \alpha.$$

Falta probar

$$(\bar{\exists} D \in \mathtt{DER}_P)(H(D) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D) = \alpha) \Rightarrow \Gamma \models \alpha.$$

O sea (observar parentización),

$$(\bar{\forall} D \in \mathtt{DER}_P)(H(D) \subseteq \Gamma \text{ y } C(D) = \alpha \Rightarrow \Gamma \models \alpha).$$

Para probar esto, alcanza con probar que:

$$(\bar{\forall} D \in \mathtt{DER}_P)(H(D) \models C(D))$$

Casos base

Hip

Sea φ una fórmula de $\mathtt{PRED}$cualquiera.

T) $\varphi \models \varphi$

Dem.
En todas las estructuras $\mathcal{M}$ en las que $\mathcal{M} \models \varphi$, se cumple que $\mathcal{M} \models \varphi$, por lo que $\varphi \models \varphi$.
■

RI_1

T) $\models t \doteq t$

Dem.
En todas las estructuras $\mathcal{M}$,se cumple que:

$$t^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}} \text{(Def. igualdad en } |\mathcal{M}|\text{)}$$
$$\Leftrightarrow \text{(Def. } \models\text{)}$$
$$\mathcal{M} \models t \doteq t$$

■

Pasos Inductivos

RI_2

Sea D una derivación arbitraria.

H)

$H(D) \models t \doteq s$

T)

$H(D) \models s \doteq t$

Dem.

Dada $\mathcal{M}$ una estructura cualquiera, se cumple que:

$$\mathcal{M} \models H(D)$$
$$\Rightarrow \text{(Hip.)}$$
$$\mathcal{M} \models t \doteq s$$
$$\Leftrightarrow \text{(Def } \models\text{)}$$
$$t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}}$$
$$\Leftrightarrow \text{(Simetría de = en } \|\mathcal{M}|\text{)}$$
$$s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$$
$$\Leftrightarrow \text{(Def. } \models\text{)}$$
$$\mathcal{M} \models s \doteq t$$

Por lo anterior, se cumple que

$$H(D) \models s \doteq t$$

■

Identidad

RI_3

Sea D y D' derivaciones arbitrarias.

H)
$H(D) \models t \doteq s$ y
$H(D') \models s \doteq u$
T)
$H(D) \cup H(D') \models t \doteq u$

Queda como ejercicio.

Congruencias

RI_4

Sean $D_1, \ldots, D_n$ derivaciones arbitrarias.

H)

$(\forall i \text{con} 1 \leq i \leq n) H(D_i) \models t_i \doteq s_i$

T)

$\bigcup_{1 \leq i \leq n} H(D_i) \models$
$t[t_1 \ldots t_n / z_1 \ldots z_n] \doteq t[s_1 \ldots s_n / z_1 \ldots z_n]$

Dem.

Queda como ejercicio.

Sugerencias y comentarios:

- Inducción en n aplicando, con estructura similar al anterior.
- Recordar las variables libres en las hipótesis.
- Falta la versión de RI_4 con fórmulas que es similar

Cuantificadores

$I\exists$ y $E\forall$

Sean D y t una derivación y un término respectivamente, ambos arbitrarios.

H) $H(D) \models (\forall x)\varphi$ t libre para x en φ	**H)** $H(D) \models \varphi[t/x]$ con t libre para x en φ
T) $H(D) \models \varphi[t/x]$	**T)** $H(D) \models (\exists x)\varphi$

Dem. (Ambos casos)

Queda como ejercicio.

■

Sugerencias:

- Observar que hay más variables libres en las hipótesis y conclusiones y deben ser tratadas con cuidado.

Condición suficiente de consistencia

H)

$(\bar{\exists}\mathcal{M})\mathcal{M} \models \Gamma$

Dem.

Considere $\varphi := \perp$ en el teorema de corrección

$\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \models \perp$

Es decir, si Γ es inconsistente, entonces Γ no tiene modelo.

La última afirmación es el contrarecíproco de lo que se quería demostrar.

■

Completitud

- $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.
- Significa que si una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, entonces hay una derivación con hipótesis en el conjunto y cuya conclusión es la fórmula.

Lemas sobre derivaciones 1

Lema 2.8.4. Variables libres y constantes

Sean Γ, φ, z tales que z no aparece en Γ ni en φ y $\Gamma \vdash \varphi$. Luego,

$$\Gamma[z/c] \vdash \varphi[z/c]$$

Observaciones

- La función $[z/c]$ no es la función ya conocida
- Este lema se demuestra mediante inducción en $\mathtt{DER}_P$

Lemas sobre derivaciones 2

Lema

Sean Γ, φ, ψ, c un conjunto de sentencias, una sentencia y una constante respectivamente, todas arbitrarias.

H)

c no aparece en Γ ni en φ ni en ψ.

$\Gamma, (\exists x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \vdash \psi$.

T)

$\Gamma \vdash \psi$

Prueba

El lema 2.8.4 garantiza que si tomo un y que no aparece en Γ ni en φ ni en ψ, puedo tomar como hipótesis $\Gamma, (\exists x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(y) \vdash \psi$.

La siguiente derivación termina la prueba...

$\Gamma, (\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y) \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{d_1}{\vdots}}{(\forall y)(((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi) \to ((\exists y)((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y))) \to \psi)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, [(\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y)] \atop \vdots\, d_2}{\psi}}{((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi}\, I\to}{(\forall y)(((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi)}\, I\forall}{(\exists y)((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y)) \to \psi}\, E\to \quad \dfrac{\dfrac{\overset{d_3}{\vdots}}{(\exists y)((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \to (\exists y)\varphi(y))} \quad \dfrac{\overset{d_4}{\vdots}}{(\exists x)\varphi(x) \to (\exists}}{(\exists y)((\exists x)\varphi(x) \to \varphi(y))}\, E\to}{\psi}$$

Donde

- d_1 es una instancia de $\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to ((\exists x)\alpha \to \beta)$ con $x \notin FV(\beta)$
- d_2 es derivación de la hipótesis.
- d_3 es una instancia de $\vdash (\exists x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\exists x)\beta)$ con $x \notin FV(\alpha)$
- d_4 es directamente $\vdash (\exists x)\varphi(x) \to (\exists y)\varphi(y)$ (Teorema de cambio de variables ligadas)

Un poco de orden

poset, cadena

Un *conjunto parcialmente ordenado* es una estructura $\langle U, \leq \rangle$ tal que

- $(\bar{\forall} a) a \leq a$
- $(\bar{\forall} a, b)$si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$
- $(\bar{\forall} a, b, c)$si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$

Una *cadena* es un subconjunto $C \subseteq U$ tal que

- $C \neq \emptyset$
- $(\bar{\forall} a, b) a \leq b$ o $b \leq a$

Más orden

cota superior, maximal

Un elemento $a \in U$ es una *cota superior de* $C \subseteq U$ si

- $(\bar{\forall} c \in C) c \leq a$

Un elemento $m \in U$ es maximal si

- $(\bar{\forall} a \in U)$si $m \leq a$ entonces $m = a$

Lema de Zorn

Sea U un poset en el que todas sus cadenas tienen alguna cota superior. Luego,

U tiene un elemento maximal.

Completitud para predicados

$\Gamma \models \varphi$

- $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ si $\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$
- $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \bar{\exists} D D \in \mathtt{DER}_P$ y $H(D) \subseteq \Gamma$ y $C(D) = \varphi$

- El lema básico en esto es:
  Γ consistente existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$
- Para demostrarlo se construye un modelo.
- Para construir el modelo se necesita trabajar sobre una teoría consistente maximal que incluya a Γ.

Teorema de completitud (PROP)

Teorema de completitud

Sean $\Gamma \subseteq \mathtt{PROP}$ y $\alpha \in \mathtt{PROP}$

$$\text{si } \Gamma \models \alpha \text{ entonces } \Gamma \vdash \alpha$$

$$\Gamma \nvdash \alpha$$
$$\Longrightarrow (RAA)$$
$$\Gamma, \neg\alpha \nvdash \bot$$
$$\Longrightarrow (?)$$
$$(\bar{\exists} v)(\bar{\forall} \varphi \in \Gamma \cup \{\neg\alpha\}) v(\varphi) = 1$$
$$\Longrightarrow \text{(Def. valuaciones)}$$
$$(\bar{\exists} v)((\bar{\forall} \varphi \in \Gamma) v(\varphi) = 1 \text{ y } v(\alpha) = 0)$$
$$\Longrightarrow \text{(Def. consecuencia semántica)}$$
$$\Gamma \not\models \alpha$$

Teorema de completitud ($\mathtt{SENT}$)

Sean $\Gamma \subseteq \mathtt{SENT}$ y $\alpha \in \mathtt{SENT}$
si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$

Demostración (parcial)

$$\Gamma \nvdash \alpha$$

$$\Rightarrow (RAA)$$

$$\Gamma, \neg\alpha \nvdash \bot$$

$$\Rightarrow (?)$$

$$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma \cup \{\neg\alpha\})v^{\mathcal{M}}(\varphi) =$$

$\Rightarrow$ (Def. interpretación)

$$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma)v^{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$$

y $v^{\mathcal{M}}(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ (Def. consecuencia semántica)

$$\Gamma \not\models \alpha$$

$$\Rightarrow (?)$$

$(\bar{\exists}T_m)\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \subseteq T_m$
y T_m es teoría cons. max.

$$\Rightarrow (?)$$

$(\bar{\exists}\mathcal{M}, T_m)\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \subseteq T_m$
y $(\bar{\forall}\varphi \in T_m)v^{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$

$$\Rightarrow (?)$$

Teorías

Notación

$\textsc{Cons}(\Gamma) := \{\varphi \in \texttt{SENT} \mid \Gamma \vdash \varphi\}$

Definición 3.1.2. Teoría, conjunto de axiomas, teoría de Henkin

i Un conjunto $T \subseteq \texttt{SENT}$ es una teoría si es cerrado bajo derivación (es decir, $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$)

ii Dada una teoría T, decimos que Γ es un conjunto de axiomas para T si $T = \textsc{Cons}(\Gamma)$

iii Una teoría T es de Henkin si para toda sentencia $(\exists x)\varphi \in \texttt{SENT}$ existe un símbolo de constante c tal que $(\exists x)\varphi \to \varphi[c/x] \in T$.
La constante c se llama *testigo* de $(\exists x)\varphi$.

Extensión, extensión conservativa

Definición 3.1.3.

Sean T una teoría en el lenguaje $\mathcal{L}$ y T' una teoría en $\mathcal{L}'$

- T' es una extensión de T si $T \subseteq T'$
- T' es una extensión conservativa de T si $T' \cap \mathcal{L} = T$

Observación 1

Diremos que el lenguaje $\mathcal{L}'$ es una extensión del lenguaje $\mathcal{L}$ si y sólo si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

Observación 2

Si T es una teoría consistente, y T' es una extensión conservativa de T, entonces T' también es consistente.

Operador $\_^*$

Definition $(\mathcal{L}^*, T^*)$

Sea T una teoría con lenguaje $\mathcal{L}$.

- $\mathcal{L}^*$ es el lenguaje que se obtiene agregando a $\mathcal{L}$ un símbolo de constante nuevo c_φ para cada sentencia $(\exists x)\varphi(x) \in \mathcal{L}$.
- $W^* :=$ $\{(\exists x)\varphi(x) \to \varphi(c_\varphi) \mid c_\varphi$ es testigo de $(\exists x)\varphi(x)\}$
- $T^* := \textsc{Cons}\,(T \cup W^*)$

T^* es conservativa con respecto a T

Lema 3.1.5

H)

$T^* \vdash \varphi$

T)

$T \vdash \varphi$

Dem.

1. $T^* \vdash \varphi$
2. $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$, con $\Gamma \subseteq T$ y $\Delta \subseteq W^*$.
3. Inducción en el tamaño de Δ usando el lema sobre derivaciones visto antes.

$\blacksquare$

Construcción de Teoría de Henkin Conservativa

Lema 3.1.6

Sea T una teoría. Definimos T_i y T_ω de la forma siguiente:

$$T_0 := T$$
$$T_{n+1} := T_n^*$$
$$T_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

Luego, T_ω es una teoría de Henkin conservativa con respecto a T.

Dem.

Hay que demostrar:

1. Cada T_n es conservativa sobre T
2. T_ω es teoría
3. T_ω es de Henkin
4. T_ω es conservativa sobre T

■

Inducción sobre $\mathbb{N}$

Paso Base

T)

$T_0 \cap \mathcal{L} = T$.

Dem.

Inmediato, porque

$T_0 = T$ y $T \subseteq \mathcal{L}$.

■

Paso Inductivo

H)

$T_n \cap \mathcal{L} = T$

T)

$T_{n+1} \cap \mathcal{L} = T$.

Dem.

$$T_{n+1} \cap \mathcal{L}$$
$$=$$
$$T_n^* \cap \mathcal{L}$$
$$=$$
$$T_n^* \cap \mathcal{L}_n \cap \mathcal{L}$$
$$=$$
$$T_n \cap \mathcal{L}$$
$$= \text{(HI)}$$
$$T.$$

■

Lema 3.1.6. Parte 2. T_ω es teoría

$T_\omega \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T_\omega$

H)

$T_\omega \vdash \varphi$

T)

$\varphi \in T_\omega$

Dem.

$$
\begin{gathered}
T_\omega \vdash \boldsymbol{\sigma} \\
\Rightarrow \\
(\bar{\exists}\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T_\omega)\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \boldsymbol{\sigma} \\
\Rightarrow \\
(\bar{\exists}k, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T_k)\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \boldsymbol{\sigma} \\
\Rightarrow \\
(\bar{\exists}k)T_k \vdash \boldsymbol{\sigma} \\
\Rightarrow \\
(\bar{\exists}k)\boldsymbol{\sigma} \in T_k \\
\Rightarrow \\
\boldsymbol{\sigma} \in T_\omega.
\end{gathered}
$$

■

Lema 3.1.6. Parte 3. T_ω es de Henkin

$(\exists x)\varphi \in \mathcal{L}_\omega \Rightarrow (\bar{\exists} c)(\exists x)\varphi \to \varphi(c) \in T_\omega$

H)

$(\exists x)\varphi \in \mathcal{L}_\omega$

T)

$(\bar{\exists} c)(\exists x)\varphi \to \varphi(c) \in T_\omega$

Dem.

$$(\exists x)\varphi \in \mathcal{L}_\omega$$
$$\Rightarrow$$
$$(\bar{\exists} k)(\exists x)\varphi \in \mathcal{L}_k$$
$$\Rightarrow$$
$$(\bar{\exists} k, c)(\exists x)\varphi \to \varphi(c) \in T_{k+1}$$
$$\Rightarrow$$
$$(\bar{\exists} c)(\exists x)\varphi \to \varphi(c) \in T_\omega.$$

■

Lema 3.1.6. Parte 4. T_ω es conservativa sobre T

$\sigma \in T_\omega \cap \mathcal{L} \Rightarrow \sigma \in T$

H)

$\sigma \in T_\omega \cap \mathcal{L}$

T)

$\sigma \in T$

Dem.

$$\sigma \in T_\omega \cap \mathcal{L}$$
$$\Rightarrow$$
$$(\bar{\exists} k)\sigma \in T_k \cap \mathcal{L}$$
$$\Rightarrow$$
$$\sigma \in T.$$

Lema 3.1.7. Un conjunto consistente está incluido en un Cons. Max.

Enunciado

Si T es una teoría consistente en el lenguaje $\mathcal{L}$, entonces existe T_m consistente maximal tal que $T \subseteq T_m$.

1. Sea $\langle A, \subseteq \rangle$ el poset ordenado por inclusión, donde A es $\{T' \subseteq \mathcal{L} \mid T \subseteq T'$ y T' es teoría consistente$\}$.
2. Toda cadena tiene una cota superior; la unión de esas teorías.
3. Existe una extensión consistente maximal de T (Lema de Zorn).

¿Qué hicimos?

1. Tomamos $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ consistente
2. Obtuvimos su extensión conservativa T_ω que es consistente y de Henkin (lema 3.1.6)
3. Extendimos T_ω a una teoría consistente maximal T_m (lema de Lindebaum)
4. Como al aplicar Lindebaum no modificamos el lenguaje de T_ω, tenemos que T_m es de Henkin (lema 3.1.8)

Lema: existencia de modelo

Enunciado

Sea T una teoría de Henkin consistente maximal en un lenguaje $\mathcal{L}$. Luego, existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models T$.

Esquema de la prueba

1. Definimos la estructura $\mathcal{M}$
2. Probamos que $(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM}_C) v^{\mathcal{M}}(t) = [t]$ (ejercicio)
3. Probamos que $(\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{SENT}) T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$

Construcción del modelo de términos: estructura $\hat{\mathcal{M}}$

Partimos del lenguaje $\mathcal{L}$, y tomamos como universo a $\mathtt{TERM}_C$, el conjunto de los términos cerrados del lenguaje $\mathcal{L}$. Definimos
$\hat{\mathcal{M}} := \left\langle \mathtt{TERM}_C, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots \right\rangle$, donde

$$\hat{c}_i := c_i$$
$$\hat{f}_i(t_1, \dots t_n) := f_i(t_1, \dots t_n)$$
$$\hat{P}_i(t_1, \dots t_n) \Leftrightarrow T \vdash P_i(t_1, \dots t_n)$$

Construcción del modelo de términos: relación $\sim$

- Definimos la relación binaria $\sim$ entre términos cerrados.

$$s \sim t \quad := \quad T \vdash s \doteq t$$

- Las reglas RI1, RI2, RI3, nos dicen que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- Las reglas RI4 nos dicen que $\sim$ es una congruencia con respecto a las relaciones y funciones de la estructura.
- $\mathtt{TERM}_C/\sim$ es el conjunto cociente de $\sim$, y $[t]$ la clase de equivalencia con representante t.

Construcción del modelo de términos: estructura $\mathcal{M}$

Definimos
$\mathcal{M} := \left\langle \mathtt{TERM}_C/\!\sim, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots \right\rangle$,
donde

$$\tilde{c}_i := [\hat{c}_i]$$
$$\tilde{f}_i([t_1], \dots [t_n]) := [\hat{f}_i(t_1, \dots t_n)]$$
$$\tilde{P}_i([t_1], \dots [t_n]) \Leftrightarrow \hat{P}_i(t_1, \dots t_n)$$

$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ (parcial)

Caso $\varphi := s \doteq t$

$$T \vdash s \doteq t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$s \sim t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{M} \models s \doteq t.$$

Análogo para $P(t_1, \dots t_n)$.

$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi$ (parcial)

Caso $\varphi = (\exists x)\psi$

$$T \vdash (\exists x)\psi$$

$$\Leftrightarrow \text{ (Henkin)}$$

$$(\bar{\exists} a) T \vdash \psi(\bar{a})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\bar{\exists} a) \mathcal{M} \vDash \psi(\bar{a})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{M} \vDash (\exists x)\psi(x).$$

$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ (parcial)

Casos de conectivos proposicionales

Se resuelven en forma parecida a lo hecho en PROP.

Casos del cuantificador universal

Se resuelve transformando la expresión en un existencial.

Modelos y teorías I

Definition (Mod)

Si Γ es un conjunto de sentencias de cierto tipo de similaridad,

$$Mod(\Gamma) \quad := \quad \{\mathcal{M} \mid (\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\mathcal{M} \vDash \alpha\}$$

Definition (Th)

Si $\mathcal{K}$ es una clase de estructuras para un tipo de similaridad,

$$Th(\mathcal{K}) \quad := \quad \{\alpha \in \mathtt{SENT} \mid (\bar{\forall}\mathcal{M} \in \mathcal{K})\mathcal{M} \vDash \alpha\}$$

Modelos y teorías II

Propiedades

$$\Gamma \subseteq Th(Mod(\Gamma))$$
$$\mathcal{K} \subseteq Mod(Th(\mathcal{K}))$$
$$\textsc{Cons}(\Gamma) = Th(Mod(\Gamma))$$