Lógica de predicados. Deducción Natural

Lógica

Contenidos I

- Introducción
- Para todo
- Existe
- Definición de DER
- Consecuencia sintáctica

Deducción natural

- Definimos inductivamente el conjunto $\mathtt{DER}_P$ de las derivaciones de la lógica de predicados.
- Caso base: derivación trivial (idem PROP)
- Para los conectivos: las mismas reglas de introducción y eliminación que en PROP
- Para los cuantificadores ($\forall$ y $\exists$) se agregan reglas de introducción y eliminación.

Contenidos I

- Introducción
- Para todo
- Existe
- Definición de DER
- Consecuencia sintáctica

¡Cómo probar un $\forall$?

Hipótesis.

$\delta_1, \ldots \delta_n$, x es una variable fresca

Tesis.

Para todo x vale α

Demostración.

Probamos α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
Como x no aparece en $\delta_1, \ldots \delta_n$ la prueba es independiente de x.
Luego, hemos probado α para cualquier x, usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

Introducción $\forall$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots, \delta_n \\ \vdots \\ \alpha\end{array}}{(\forall x)\alpha}\; I_\forall(*)$$

(*) x no ocurre libre en las hipótesis $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

¿Cómo utilizar un ∀?

Hipótesis.

$\delta_1, \ldots \delta_n$, y t es el nombre de un individuo.

Tesis.

El individuo nombrado por t cumple la propiedad α

Demostración.

Probamos $(\forall x)\alpha$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

Luego, vale $\alpha[t/x]$.

Eliminación

$$\cfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots, \delta_n \\ \vdots \\ (\forall x)\alpha\end{array}}{\alpha[t/x]}\; E_\forall(*)$$

(*) t debe estar libre para x en α.

Contenidos I

- Introducción
- Para todo
- Existe
- Definición de DER
- Consecuencia sintáctica

¿Cómo probar un ∃?

Hipótesis.

$\delta_1, \dots \delta_n$.

Tesis.

Algún individuo cumple la propiedad α.

Demostración.

Pruebo que α vale para cierto t, usando $\delta_1, \dots \delta_n$.
Luego, existe un elemento para el cual vale α.

Introducción ∃

$$\begin{array}{c} \delta_1, \dots, \delta_n \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha[t/x]}{(\exists x)\alpha}\ I_{\exists}(*) \end{array}$$

(*) t debe estar libre para x en α.

¿Cómo utilizar un ∃?

Hipótesis.

$\delta_1, \ldots \delta_n$, algún individuo cumple la propiedad α, y $x \notin \mathrm{FV}(\{\delta_1, \ldots \delta_n\})$.

Tesis.

Se cumple β.

Demostración.

Asumimos que x cumple α.
Probamos β usando
$\delta_1, \ldots \delta_n$ y α
Luego, hemos probado β,
usando $\delta_1, \ldots \delta_n$ y $(\exists x)\alpha$

Eliminación ∃

$$\dfrac{(\exists x)\alpha \qquad \begin{array}{c} \delta_1, \ldots, \delta_n, [\alpha]^{(1)} \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}\; E_{\exists}^{(1)}(*)$$

(*) x no ocurre libre ni en β ni en las hipótesis $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Contenidos I

Definición: $\mathtt{DER}_P$

El conjunto $\mathtt{DER}_P$ de las derivaciones de la lógica de predicados se define inductivamente como sigue:

Análogo a $\mathtt{DER}$

$$Hip \quad I_\wedge \quad E_{\wedge_1} \quad E_{\wedge_2} \quad I_{\vee_1} \quad I_{\vee_2} \quad E_\vee \quad I_\to$$
$$E_\to \quad I_\neg \quad E_\neg \quad I_\leftrightarrow \quad E_{\leftrightarrow_1} \quad E_{\leftrightarrow_2} \quad E_\perp \quad RAA$$

Definición: $\mathtt{DER}_P - \forall$

$I\forall$

Si $\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \in \mathtt{DER}_P$ y $x \notin \mathrm{FV}(H(D))$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array}}{(\forall x)\varphi} \in \mathtt{DER}_P$$

$E\forall$

Si $\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ (\forall x)\varphi \end{array} \in \mathtt{DER}_P$ y t está libre para x en φ, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ (\forall x)\varphi \end{array}}{\varphi[t/x]} \in \mathtt{DER}_P$$

Definición: $\mathtt{DER}_P\exists$

$I\exists$

Si $\begin{array}{c}\nabla\!\!\!\!\!D\\ \varphi[t/x]\end{array} \in \mathtt{DER}_P$ y t está libre para x en φ, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla\!\!\!\!\!D\\ \varphi[t/x]\end{array}}{(\exists x)\varphi} \in \mathtt{DER}_P$$

Definición: $\mathtt{DER}_P\exists$

$E\exists$

Si $\begin{array}{c} D \\ (\exists x)\varphi \end{array} \in \mathtt{DER}_P$ y $\begin{array}{c} \varphi \\ D' \\ \psi \end{array} \in \mathtt{DER}_P$ y $x \notin \mathrm{FV}(H(D') - \{\varphi\})$

y $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\exists x)\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi] \\ D' \\ \psi \end{array}}{\psi} \in \mathtt{DER}_P$$

Contenidos I

- Introducción
- Para todo
- Existe
- Definición de DER
- Consecuencia sintáctica

Consecuencia sintáctica

Definición

Sea $\Gamma \subseteq \mathtt{FORM}$ y $\varphi \in \mathtt{FORM}$. Decimos que φ *es consecuencia sintáctica de* Γ o que φ *se deriva de* Γ ssi existe $D \in \mathtt{DER}_P$ tal que: $C(D) = \varphi$ y $H(D) \subseteq \Gamma$.

Notación

$\Gamma \vdash \varphi$ se lee φ *se deriva de* Γ.

$\vdash \varphi$ se lee φ *es teorema*.

Restricciones sobre las variables

¿Se necesitan las restricciones en$\forall$ y $\exists$?

Sin las restricciones, las reglas permiten construir derivaciones que corresponden a razonamientos incorrectos.

$I\forall$

$$\cancel{\frac{x \doteq c_1}{(\forall x) x \doteq c_1}\; I\forall}$$

x es c_1

Sólo hay
un elemento el universo???

La introducción es incorrecta porque x está libre en la hipótesis.

¿Se necesitan las restricciones en ∀ y ∃ ?

$E\forall$

$$\cancel{\frac{(\forall x)\neg(\forall y)x =' y}{\neg(\forall y)y =' y}} E\forall$$

Hay mas de un elemento.

Hay un elemento que no es igual a sí mismo???

Es incorrecta porque y no está libre para x en $\neg(\forall y)x =' y$.

¿Se necesitan las restricciones en ∀ y ∃ ?

$I\exists$

$$\cancel{\frac{(\forall x)(x =' f(x))}{(\exists y)(\forall x)(x =' y)}} I\exists$$

$f(x)$ es la identidad

Sólo hay
un elemento el universo???

Es incorrecta porque $f(x)$ no está libre para y en $(\forall x)(x =' y)$.

¿Se necesitan las restricciones en ∀ y ∃ ?

$E\exists$

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x)P_1(x) \quad [P_1(x)]_{(1)}}{P_1(x)}\;E\exists^1}{(\forall x)P_1(x)}\;I\forall$$

Al menos un elemento cumple la propiedad

Todos los elementos cumplen la propiedad???

Es incorrecta porque x está libre en la conclusión de la eliminación de $(\exists x)P_1(x)$

Restricciones y alcance

- Hay que recordar que las hipótesis canceladas, en realidad, son hipótesis normales de sub-derivaciones.
- Son hipótesis normales (abiertas, sin cancelar), desde donde aparecen hasta la regla que las cancela y por lo tanto, valen las restricciones en todas las reglas que se utilicen entre esos lugares.

Controlar la zona de cancelación

$$\dfrac{(\exists x)P_1(x) \qquad \dfrac{[P_1(x)]_{(1)}}{(\forall x)P_1(x)}\,I\forall}{(\forall x)P_1(x)}\,E\exists^1$$

Es incorrecto porque la hipótesis $P_1(x)$ está abierta desde donde aparece hasta la regla que la cancela.

Ejemplos

$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\alpha \to (\forall x_2)(\forall x_1)\alpha$

$\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\alpha \to (\exists x_2)(\exists x_1)\alpha$

$\vdash (\forall x_1)(\alpha \wedge \beta) \to (\forall x_1)\alpha \wedge (\forall x_1)\beta$

$\vdash (\exists x_1)(\alpha \vee \beta) \to (\exists x_1)\alpha \vee (\exists x_1)\beta$

$\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\exists x)\beta)$

$\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$, si $x \notin FV(\alpha)$

$\vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to ((\exists x)\alpha \to \beta)$, si $x \notin FV(\beta)$

Propiedades de los cuantificadores

Lema: propiedades de derivabilidad del $\forall$

- Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$.
- Si $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$ y t libre para x en φ, entonces $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$.

Lema: propiedades de derivabilidad del $\exists$

- Si t es libre para x en φ entonces $\varphi[t/x] \vdash (\exists x)\varphi$
- Si $x \notin \mathrm{FV}(\psi) \cup \mathrm{FV}(\Gamma)$ entonces, si $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ luego $\Gamma, (\exists x)\varphi \vdash \psi$

Igualdad e identidad

Hasta ahora usamos hemos interpretado el símbolo $\doteq$ en cada estructura como la *igualdad*. Otra alternativa es caracterizarlo como *identidad* a través de axiomas.

Axiomas de Identidad

Esquemas de Axiomas

I1 $(\forall x)x \doteq x$

I2 $(\forall x)(\forall y)(x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$

I3 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \doteq y \wedge y \doteq z \rightarrow x \doteq z)$

I4 $(\forall y_1) \quad \ldots (\forall y_n)(\forall z_1) \ldots (\forall z_n)($
$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} y_i \doteq z_i \rightarrow t(y_1, \ldots y_n) \doteq t(z_1, \ldots z_n))$

$(\forall y_1) \quad \ldots (\forall y_n)(\forall z_1) \ldots (\forall z_n)($
$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} y_i \doteq z_i \rightarrow \varphi(y_1, \ldots y_n) \leftrightarrow \varphi(z_1, \ldots z_n))$

Propiedades de los Axiomas

- Si una estructura $\mathscr{M}$ es modelo de $I1, I2, I3$ entonces el símbolo $\doteq$ es interpretado por una relación de equivalencia.
- $I4$ exige además que la relación sea una *congruencia* con respecto a todas las relaciones definibles en el lenguaje.
- Si interpretamos a $\doteq$ como la identidad, se demuestra que toda estructura $\mathscr{M}$ cumple

$$\mathscr{M} \models \{I1, I2, I3, I4\}$$

Identidad y Deducción Natural (1/2)

Los axiomas pueden incorporarse como reglas de derivación.

$$\frac{}{t \doteq t}\ RI1$$

$$\frac{t \doteq s}{s \doteq t}\ RI2$$

$$\frac{t \doteq s \quad s \doteq r}{t \doteq r}\ RI3$$

Identidad y Deducción Natural (2/2)

Los axiomas pueden incorporarse como reglas de derivación.

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_n \doteq s_n}{t[t_1, \dots, t_n/z_1, \dots, z_n] \doteq t[s_1, \dots, s_n/z_1, \dots, z_n]} \; RI4$$

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \dots \quad t_n \doteq s_n \quad \varphi[t_1, \dots, t_n/z_1, \dots, z_n]}{\varphi[s_1, \dots, s_n/z_1, \dots, z_n]} \; RI4^*$$

(*) Para cada $i \in [1..n]$ se tiene que t_i y s_i están libres para z_i en φ.

Otras Versiones de las Reglas

Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de tipo $\langle r_1, \ldots r_n; a_1, \ldots a_m; k\rangle$. Entonces, los axiomas RI4 pueden derivarse de

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_{a_j} \doteq s_{a_j}}{f_j(t_1, \ldots, t_{a_j}) \doteq f_j(s_1, \ldots, s_{a_j})}\ RI4'$$

$$\frac{t_1 \doteq s_1 \quad \ldots \quad t_{r_i} \doteq s_{r_i} \quad P(t_1, \ldots, t_{r_i})}{P_i(s_1, \ldots, s_{r_i})}\ RI4'^{*}$$

usando inducción en `TERM` y `FORM`.

$\Gamma \models \varphi$

Para poder probar consistencia, debemos extender la definición de $\models$ a todo $\texttt{FORM}$.

Intuitivamente, $\Gamma \models \varphi$ vale sólo si, para todas las estructuras $\mathscr{M}$ y todas las posibles asignaciones $\tilde{a}$ (en $|\mathscr{M}|$) de valores a las variables libres de Γ y de φ, se verifica que: si las hipótesis en $\Gamma(\tilde{a})$ son ciertas, entonces también es cierta $\varphi(\tilde{a})$

Definición. $\varphi(\tilde{a}), \Gamma(\tilde{a})$

Dados $\Gamma \subseteq \mathtt{FORM}, \varphi \in \mathtt{FORM}$
tales que $\mathrm{FV}(\Gamma) \cup \mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \{y_1, y_2, \dots\}$,
y una estructura $\mathscr{M}$
donde $\tilde{a}$ una secuencia $(a_1, a_2, \dots)$ de elementos de $|\mathscr{M}|$ (eventualmente repetidos)

definimos $\Gamma(\tilde{a})$ y $\varphi(\tilde{a})$ como la sustitución simultánea $\Gamma[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots / y_1, y_2 \dots]$ y $\varphi[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots / y_1, y_2 \dots]$ en todas las fórmulas de Γ y en φ de los y_j por los $\bar{a}_j$.

Def 2.8.1. $\mathscr{M} \models \Gamma(\tilde{a})$ y $\Gamma \models \varphi$

i) $\mathscr{M} \models \Gamma(\tilde{a})$ si para todo $\psi \in \Gamma(\tilde{a})$ se cumple $\mathscr{M} \models \psi$

ii) $\Gamma \models \varphi$ si para toda estructura $\mathscr{M}$ y para toda secuencia $\tilde{a}$ en $|\mathscr{M}|$, si $\mathscr{M} \models \Gamma(\tilde{a})$ entonces $\mathscr{M} \models \varphi(\tilde{a})$

Observación

Esta definición generaliza la definición 2.2.4. Que se aplica sólo si $\Gamma \subseteq \mathtt{SENT}$ y $\varphi \in \mathtt{SENT}$.

Lema 2.8.2. Corrección de $\mathtt{DER}_P$

Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$

Aplicaciones

Demostrar que:

- $\nvdash (\forall x)(\exists y)\varphi \rightarrow (\exists y)(\forall x)\varphi$
- $(\forall x)P(x,x), (\forall y)(\forall x)(P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \nvdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$