Práctico 7

Semántica de la Lógica de Predicados

Ejercicio 1

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 1, 1, 2; 3\rangle$ con símbolos de función f_1, f_2 (unarios), f_3 (binario) y símbolos de constante c_1, c_2, c_3.

Sea B una estructura de dicho tipo definida como sigue: $B = \langle \mathbb{R}, ^2, |\ |, -, 0, 1, 2\rangle$ donde ^{2} es la función cuadrado, $|\ |$ el valor absoluto y $-$ la resta.

Evalúe: $(f_2(f_3(f_1(c_3), f_1(c_2))))^B$ y $(f_2(f_3(c_2, f_3(c_2, f_1(c_3)))))^B$.

Ejercicio 2

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 1, 2; 1\rangle$ con símbolos función f_1 (unario), f_2 (binario) y símbolo de constante c_1. Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

$A = \langle \mathbb{N}, S, +, 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$

$B = \langle \mathbb{N}, D, *, 1\rangle$ donde $D(x) = 2 * x$

Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que $t^B = 2^{t^A}$.

Ejercicio 3

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle -; 1, 1; 1\rangle$, con símbolos de función: f y g y símbolo de constante c.

Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +1, +2, 0\rangle$, donde $+1$ es la función que suma uno y $+2$ es la función que suma dos.

a. I. **Sin usar el símbolo** f, defina inductivamente el lenguaje infinito $T_1 \subseteq \texttt{TERM}$ tal que las interpretaciones de los elementos de T_1 en $\mathcal{M}$ son múltipos de 4.
   II. Demuestre que el lenguaje T_1 cumple la propiedad solicitada.

b. **Sin usar el símbolo** f, defina inductivamente el lenguaje infinito $T_2 \subseteq \texttt{TERM}$ tal que las interpretaciones de los elementos de T_2 en $\mathcal{M}$ son múltipos de 4 más 2 (por ejemplo 10,14). **No utilizar T_1 para la definición de T_2.**

   No es necesario demostrar que T_2 cumple la propiedad solicitada.

c. Pruebe que $(\bar{\forall} t_1 \in T_1)(\bar{\forall} t_2 \in T_2) t_1 \neq t_2$

d. Demuestre que la siguiente afirmación es falsa:

$$(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM})\text{si } t^{\mathcal{M}} \text{ es par entonces } t \in T_1 \cup T_2$$

Ejercicio 4

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2, 2, 1; 1\rangle$. Sea A una estructura de dicho tipo definida como sigue: $A = \langle \mathbb{N}, +, *, S, 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$.

a. Defina los símbolos del alfabeto y dé dos términos distintos t_1 y t_2 del lenguaje tales que ${t_1}^A = {t_2}^A = 3$.

b. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay un término t tal que $t^A = n$.

c. Sea t un término y n un natural. Demuestre que si $t^A = n$ entonces existe t' tal que $t'^A = n$ y tiene más ocurrencias de los símboles f_1 y c_1.

d. Demuestre por el absurdo que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay infinitos términos t tales que $t^A = n$.

Ejercicio 5

El Lema 2.4.5 se cumple para fórmulas cerradas (*sentencias*). ¿Cuáles casos de dicho lema dejan de cumplirse si se consideran fórmulas que *no* son sentencias?

Ejercicio 6

a. Sabemos que para toda *sentencia* σ y estructura A del tipo adecuado se cumple que $A \models \sigma$ o $A \models \neg\sigma$. Muestre que esta propiedad no vale para σ con $\mathrm{FV}(\sigma) \neq \emptyset$.

b. Muestre que ni aún para el caso en que σ sea una *sentencia* vale que $\models \sigma$ o $\models \neg\sigma$.

Ejercicio 7

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 1; 1; 1\rangle$ con símbolos de predicado P_1, P_2 (unarios), símbolo de función f_1 (unario) y símbolo de constante c_1.

Considere los siguientes lenguajes:

i. $\varepsilon \in L_1$	i. $\varepsilon \in L_2$
ii. si $\omega \in L_1$ entonces $a\omega \in L_1$	ii. si $\omega \in L_2$ entonces $b\omega \in L_2$
iii. si $\omega \in L_1$ entonces $c\omega \in L_1$	iii. si $\omega \in L_2$ entonces $c\omega \in L_2$

Sea la estructura $\mathcal{M} = \langle \Sigma^*, L_1, L_2, F, \varepsilon\rangle$ con $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $F : \Sigma^* \to \Sigma^*$ una función que dada un tira reemplaza todas las ocurrencias de 'a' por 'b'.

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$

b. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P_1(x) \to P_2(f_1(x)))$

c. $\mathcal{M} \models (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$

Ejercicio 8

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 1, 2; 2, 1; 0\rangle$ con símbolos de predicado P_1, P_2 (unarios), P_3 (binario) y símbolos de función f_1 (binario), f_2 (unario).

Sea la estructura

$$\mathcal{M} = \langle \mathtt{PROP}, \{\varphi \mid \ \models \varphi\}, \{\bot\}, \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}, F_\wedge, F_\neg\rangle$$

donde $F_\wedge(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ y $F_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$.

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $\mathcal{M} \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \to ((\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$

b. $\mathcal{M} \models (P_1(x) \to P_2(x))$

c. $\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \to P_1(f_1(x, y)))$

Ejercicio 9

Demuestre que para dos fórmulas cualesquiera φ y ψ se cumple que:
Si (para toda estructura A del tipo adecuado ($A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi$)) entonces ($\models \varphi \Rightarrow \models \psi$).
Muestre que el recíproco no se cumple.

Ejercicio 10

a. Sean φ y ψ fórmulas cualesquiera de FORM. Demuestre:

   I. si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ y $\models \varphi$ entonces $\models \psi$
   II. Si $\models \varphi$ entonces $\models \forall x\varphi$ y $\models \exists x\varphi$
   III. $\models (\forall x)(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\psi))$

b. De φ y ψ fórmulas de FORM para que se cumplan las siguientes afirmaciones:

   I. $\not\models \forall x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\forall x\varphi$
   II. $\not\models \exists x\varphi \to \forall x\varphi$

Ejercicio 11

Sean φ, ψ dos fórmulas cualesquiera y x una variable tal que $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$.

a. Demuestre usando equivalentes las siguientes afirmaciones:

   I. $\models (\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$
   II. $\models (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$
   III. $\models (\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$
   IV. $\models (\psi \to \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$

b. Para cada uno de los casos anteriores encuentre φ y ψ con $x \in \mathrm{FV}(\psi)$ de forma tal que las afirmaciones no se cumplen.

Ejercicio 12

Sean φ, ψ fórmulas de un lenguaje de primer orden. Suponer que $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) = \{x\}$. Demuestre que:

a. $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
b. $\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$
c. $\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$
d. $\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$
e. $\models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$

Ejercicio 13

Sea L un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle -; 1; 1\rangle$, con símbolo de función f y símbolo de constante c_1.

a. Dé M tal que $M \models f(x) =' c_1$. Justifique su respuesta.

b. Sea $\varphi := f(x) =' c_1 \wedge (\exists y)(f(y) =' x)$

   I. Encontrar M_1 tal que $M_1 \models \varphi$. Justifique su respuesta.

   II. Demostrar que $\not\models \varphi$.

   III. Determine si existe M_2 tal que $M_2 \models \neg\varphi$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 14

Un grupo es un conjunto G no vacío, con una operación binaria $* : G \times G \to G$ y tal que para dicho conjunto y considerando dicha operación binaria se verifican las siguientes propiedades:

- Existencia de neutro.
- Existencia de inverso.
- Propiedad asociativa.

Si además la pareja (G,$*$) verifica una cuarta propiedad, la conmutativa, se dice que el grupo es *abeliano*.

En lógica de primer orden podemos representar grupos a través de estructuras que cuenten con un símbolo de función binario y que modelen dichas propiedades. Para estos fines consideraremos un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2; 0 \rangle$ con símbolo de función f (binario).

a. Escriba fórmulas en primer orden que modelen las propiedades descritas anteriormente.

b. Considerando Γ al conjunto de las primeras tres fórmulas anteriores, diremos que una estructura M del tipo $\langle -; 2; 0 \rangle$ es un *grupo* si y sólo si $M \models \Gamma$. A continuación indique cuáles de las siguientes estructuras son grupos y en caso de serlo si es o no abeliano. Justifique su respuesta.

   $M_1 = \langle M_{2\times 2}(\mathbb{R}), * \rangle$ donde $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices (2×2) reales con determinante $\neq 0$, $*$ el producto de matrices.
   $M_2 = \langle Z/_5, + \rangle$ donde $Z/_5$ denota el conjunto de los enteros *mod* 5 y $+$ la suma *mod* 5.
   $M_3 = \langle \{0, 1, 2\}, \Diamond \rangle$ donde $\Diamond$ es un operador binario dado por la siguiente tabla:

$\Diamond$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	0
2	2	0	0

Ejercicio 15

Considere el teorema sobre el cambio de variables ligadas:
Sean x, z tales que $x, z \notin FV(\alpha)$. Entonces:

- $(\forall x)\alpha[x/y]$ eq $(\forall z)\alpha[z/y]$
- $(\exists x)\alpha[x/y]$ eq $(\exists z)\alpha[z/y]$

Encuentre una fórmula α tal que $z \in \text{FV}(\alpha)$ de forma tal que las equivalencias no se cumplan.

Ejercicio 16

Considere una función $g : P \to \text{FORM}$ que a cada letra proposicional le asigna una fórmula, y la siguiente función que transforma proposiciones en fórmulas:

$$\begin{array}{l} f : PROP \to FORM \\ f(p_i) = g(p_i) \\ f(\bot) = \bot \\ f(\alpha \Diamond \beta) = f(\alpha) \Diamond f(\beta),\ \Diamond \in \{\to, \leftrightarrow, \land, \lor\} \\ f(\neg\alpha) = \neg f(\alpha) \end{array}$$

a. Suponga que g sólo devuelve fórmulas cerradas.
   Pruebe que para una estructura M arbitraria de tipo adecuado, existe una valuación v tal que para toda $\varphi \in PROP$ se cumple que: $v(\varphi) = v^M(f(\varphi))$.
b. Sea M una estructura arbitraria de tipo adecuado, y $a_1, ..., a_m$ una m-upla de elementos de $|M|$. Pruebe que existe una valuación v tal que para toda $\varphi \in PROP$, siendo $\text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$, se cumple que $v(\varphi) = v^M(f(\varphi)[{}^{\bar{a_1},...,\bar{a_m}}/{}_{x_1,...,x_m}])$.
c. Pruebe que para toda $\varphi \in PROP$, si $\models \varphi$ entonces $\models f(\varphi)$.

Ejercicio 17

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; 1; 0 \rangle$ y las siguentes fórmulas

- $\varphi_1 := P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y)$.
- $\varphi_2 := (\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x)$.

a. Para cada caso propocione una estructura M_i en caso que exista. Justifique su respuesta.
   I. $M_1 \models \varphi_1$.
   II. $M_2 \models \varphi_2$.
   III. $M_3 \not\models \varphi_2$.
b. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones.
   I. $\models (\forall x)(P(f(x)) \land (\exists y)\neg P(y)) \lor ((\exists x)(\forall y)x =' y \to (\forall x)x =' f(x))$.
   II. $\overline{\exists}\psi \in \text{SENT}$ tal que ψ no es subfórmula de φ_1, φ_1 no es subfórmula de ψ y $\psi \models \varphi_1$.

Ejercicio 18

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1; 2, 2; 0\rangle$, con dos símbolos de predicado P_1 y P_2 y dos símbolos de función f_1 y f_2.

Sean las fórmulas:

- $\varphi_1 = (\forall x_1)(\forall x_2)(P_1(x_1) \wedge P_1(x_2) \to P_1(f_1(x_1, x_2)))$
- $\varphi_2 = (\forall x_1)(P_2(f_2(x_1, x_2)) \to P_2(f_1(x_1, x_2)))$

Sea la estructura: $\mathcal{M}_1 = \langle \mathtt{PROP}, \mathtt{PROP} - \mathtt{CONT}, \mathtt{PROP} - \mathtt{TAUT}, F_\wedge, F_\vee\rangle$, donde

- $\mathtt{PROP}$ es el conjunto de todas las fórmulas proposicionales.
- $\mathtt{TAUT} = \{\alpha \in \mathtt{PROP} \mid (\bar{\forall} v : Val)\ v(\alpha) = 1\}$
- $\mathtt{CONT} = \{\alpha \in \mathtt{PROP} \mid (\bar{\forall} v : Val)\ v(\alpha) = 0\}$
- $F_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$ y $F_\vee(\alpha, \beta) = (\alpha \vee \beta)$ para todo α y β de $\mathtt{PROP}$.

a. Determine si $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$. Justifique.
b. Determine si $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$. Justifique.
c. Determine si existe una estructura $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{B}, A_1, A_2, F, G\rangle$, del tipo de similaridad adecuado, tal que:

   - $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
   - $\emptyset \subset A_1 \subset \mathbb{B}, \emptyset \subset A_2 \subset \mathbb{B}$
   - $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_2 \models \varphi_2$.

   Justifique su respuesta.

Ejercicio 19

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 2; -; 0\rangle$ y símbolos P_1 y P_2 para el primer y segundo predicado respectivamente. Considere una estructura $\mathcal{M} = \langle \mathcal{Z}, Q, S\rangle$ donde $\mathcal{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

a. Considere las siguientes afirmaciones:

$$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x)) \tag{1}$$

$$Q \text{ es finito y } 1 \in Q \tag{2}$$

$$Q \neq \emptyset \tag{3}$$

   I. Demuestre que (2) es una condición *suficiente* para que se cumpla (1).
   II. Demuestre que (2) no es una condición *necesaria* para que se cumpla (1).
   III. Demuestre que (3) es una condición *necesaria* para que se cumpla (1).
   IV. Demuestre que (3) no es una condición *suficiente* para que se cumpla (1).
   V. Indique alguna condición necesaria y suficiente para que se cumpla (1).

b. Considere la afirmación:

$$\mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y) \tag{4}$$

I. Demuestre que (3) no es ni necesario ni suficiente para que se cumpla (4).
II. Indique alguna condición necesaria y suficiente para que se cumpla (4).

c. Determine si es posible encontrar una estructura $\mathcal{M}_1$ que cumpla las siguientes condiciones. Justifique su respuesta.

$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x) \text{ y } \mathcal{M}_1 \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \to (\forall x)(\forall y)P_2(x,y)$$