

2) Método de secciones.

Introducción.

Los diagramas de solicitaciones son herramientas analíticas, principalmente gráficas, que permiten disponer de información útil para el diseño de elementos de máquinas o estructuras.

En ellos se representan los distintos estados de carga que se presentan en dichos elementos, generalmente en función de una variable, por ejemplo la posición (x) a lo largo de una viga desde un extremo ($x=0$), hasta el opuesto ($x=L$, siendo L el largo de la viga).

En estos diagramas se pueden representar tanto fuerzas (directa o normal, y cortante) como momentos (flector y torsor)

Veremos dentro de estos diagramas, que resultarán herramientas imprescindibles para conocer los esfuerzos internos en el material, y de esta manera determinar, para su diseño, las especificaciones necesarias, los siguientes:

- Diagrama de fuerza normal o directa,
- Diagrama de fuerza cortante o rasante,
- Diagrama de momento flector,
- Diagrama de momento torsor.

Concepto de fuerzas internas y externas.

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido se pueden dividir en dos grupos:

- fuerzas externas,
- fuerzas internas.

i) Las **fuerzas externas** representan la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido bajo consideración. Ellas son responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas causarían que el cuerpo se mueva o asegurarán que éste permanezca en reposo.

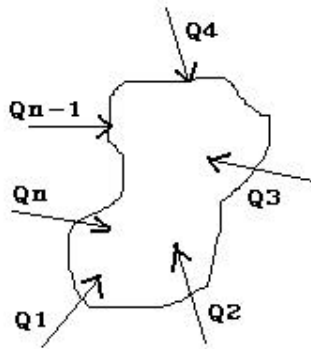


Figura nº 2.1. Fuerzas externas actuando en un cuerpo sólido.

ii) Las **fuerzas internas** son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman las partículas que conforman el cuerpo rígido. Si el cuerpo rígido está constituido estructuralmente por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes, también se definen como fuerzas internas.

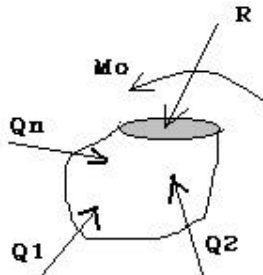


Figura n° 2.2. Fuerzas internas actuando en una sección arbitraria del cuerpo.

Fuerza directa o normal.

La fuerza normal o directa es aquella fuerza interna que se ejerce en cada sección de la viga, de forma paralela al eje de la misma, es decir actuando en la dirección longitudinal, tal como se produce en un ensayo de resistencia a la tracción.

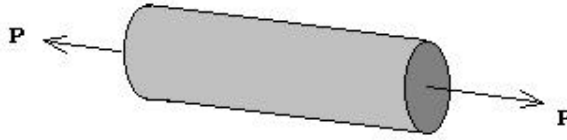


Diagrama de fuerza directa o normal.

Es la representación en un par de ejes cartesianos, de la fuerza normal actuando sobre una viga, en función de la posición de cada sección transversal a la viga.

Se indica en el eje de las abscisas la posición en la viga, y en el de las ordenadas el valor de la fuerza, siendo este positivo si es de tracción y negativo si es de compresión.

Fuerza cortante o rasante.

La fuerza cortante es aquella fuerza interna que se ejerce en cada sección de la viga, de forma transversal al eje de la misma, es decir actuando en la dirección perpendicular a este, tal como se produce en un ensayo de resistencia al corte.¹

Se produce como respuesta, d el cuerpo rígido, al estado de carga (fuerzas externas).



Figura n° 2.3. Fuerza cortante en una viga(valor negativo).

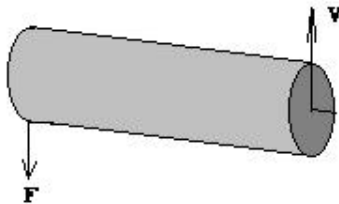


Figura n° 2.4. Fuerza cortante en una viga(sección).

¹ El estado de corte puro no se da en la realidad; aún en los ensayos de corte en especímenes estandarizados, Se asumen condiciones aproximadas, de acuerdo a lo que pasa comúnmente: se encuentran estados de carga mixtos, por ejemplo corte y flexión combinadas, tal como en el ensayo antedicho.

Diagrama de fuerza cortante.

Es la representación en un par de ejes cartesianos, de la fuerza cortante actuando sobre una viga, en función de la posición de cada sección transversal a la viga.

Se indica en el eje de las abscisas la posición en la viga, y en el de las ordenadas el valor de la fuerza, siendo este positivo o negativo según la siguiente convención de signos:

Es positiva si dada una porción infinitesimal de la viga, las fuerzas cortantes tienden a rotar dicha porción en sentido horario.

Es negativa si dada una porción infinitesimal de la viga, las fuerzas cortantes tienden a rotar dicha porción en sentido antihorario.

Momento flector.

El momento flector como lo indica su propia denominación, es un par que se induce en el cuerpo rígido, por medio de las fuerzas externas actuando sobre este, y que tiende a flexionarlo, es decir a doblarlo, curvarlo.

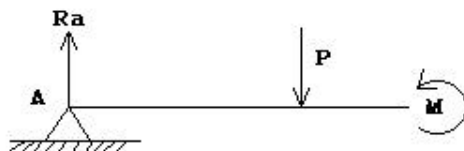


Figura n° 2.5. Momento flector actuando en una viga (valor positivo).

Diagrama de momento flector.

Es la representación en un par de ejes cartesianos, del momento flector actuando sobre una viga, en función de la posición de cada sección transversal a la viga.

Cálculo de momento flector y fuerza cortante.

Convención de signos.

Es necesario, antes que nada, realizar una convención en cuanto al signo de la fuerza cortante, así como del momento flector.

Tenemos de acuerdo a esta, que:

- La fuerza cortante es positiva cuando las fuerzas externas (las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortarla como se indica en la siguiente figura.

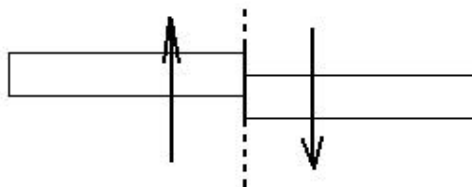


Figura n° 2.6. Definición de fuerza cortante positiva según el efecto de las fuerzas externas.

- El momento flector es positivo cuando las fuerzas externas (las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a flexionarla como se indica en la siguiente figura.

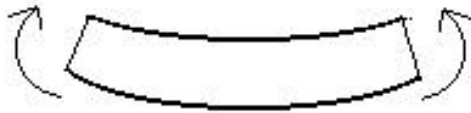


Figura n° 2.7. Definición de momento flector positivo según el efecto de las fuerzas externas.

En la siguiente figura se muestran según la precedente convención, como serán los momentos y fuerzas positivos según se tome como cuerpo libre, una porción de la viga a la izquierda de una sección o a la derecha de esta:

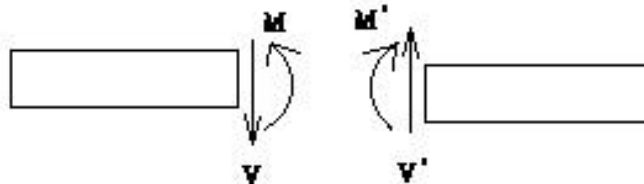


Figura n° 2.8. Momento flector y fuerza cortante actuando en una viga (valores positivos), según el lado de la sección para la que se realice equilibrio en el diagrama de cuerpo libre.

Ejemplo 1

Consideraremos el ejemplo de la siguiente figura para redefinir los conceptos de fuerza cortante y momento flector, actuando en una viga, y estudiar la forma en que se calculan ambos.

El ejemplo sencillo, trata de una viga de largo L , simplemente apoyada, con pernos en los extremos, de manera que no se producen momentos en ellos, y los extremos pueden así girar libremente.

La carga aplicada es una fuerza concentrada P , aplicada a una distancia que llamaremos a , siendo las reacciones resultantes en los apoyos, R_a , y R_b .

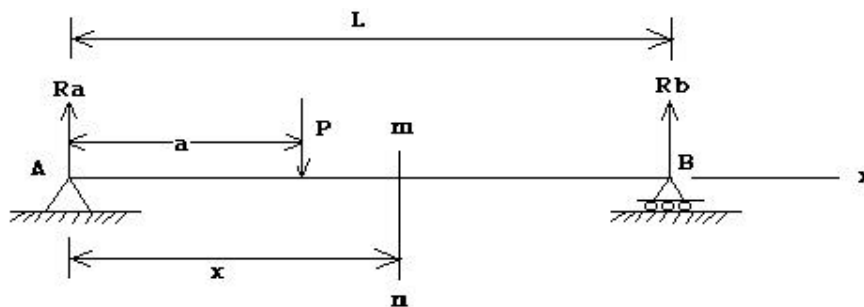


Figura n° 2.9. Figura del ejemplo.

Dada una sección de la viga $m-n$, definimos entonces la **fuerza cortante** como la suma algebraica de las fuerzas externas que actúan sobre el lado izquierdo de la sección $m-n$, tal como se representa en la siguiente figura.

Así, también definimos, el **momento flector**, como la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas aplicadas a la porción ubicada a la izquierda de la sección m-n, con respecto al centroide² de dicha sección.

Cabe destacar la característica inherente a ambos tipos de carga, es decir que ambas son debidas a fuerzas internas, de acuerdo con la definición dada anteriormente.

Más aún, dado que todos los cálculos se basan en las ecuaciones de la estática, se enfatiza en la necesidad de la existencia de estas cargas internas o sollicitaciones, para cumplir con dicha condición de equilibrio de fuerzas, para cualquier porción del cuerpo (viga) considerada.

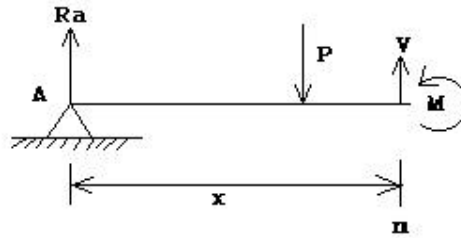


Figura n° 2.10. Fuerzas internas actuando en una sección m-n de la viga.

Según las definiciones dadas, se tendrá en el ejemplo que:

$$V(x) = R_a - P,$$

$$M(x) = R_a \cdot x - P(x-a).$$

Cabe destacar que lo calculado arriba, es solamente para la sección m-n. para las demás tenemos:

$$0 < x < a \Rightarrow V(x) = R_a,$$

$$M(x) = R_a \cdot x, \text{ y lo anteriormente calculado para}$$

$$a < x < L \Rightarrow V(x) = R_a - P,$$

$$M(x) = R_a \cdot x - P(x-a).$$

Si calculamos las reacciones R_a y R_b , obtenemos:

2ª cardinal respecto al punto A:

$$R_b \cdot L - P \cdot a = 0, \Rightarrow R_b = P \cdot (a/L)$$

1ª cardinal:

$$R_b + R_a - P = 0, \Rightarrow R_a = P - R_b = P - P \cdot (a/L) = P \cdot (b/L),$$

donde $b = L - a$.

$$\Rightarrow R_b = P \cdot (a/L),$$

$$R_a = P \cdot (b/L).$$

² Ver teórico de propiedades geométricas.

Por lo tanto ahora se pueden tener tanto la fuerza cortante, como el momento flector para cada sección (x), en función de la carga P, y la geometría conocida:

$$0 < x < a \Rightarrow V(x) = R_a = P \cdot (b/L)$$

$$M(x) = R_a \cdot x = P \cdot (b/L) \cdot x$$

$$a < x < L \Rightarrow V(x) = R_a - P = P \cdot (b/L) - P = P \cdot (b/L - 1) = P \cdot (b - L) / L = -P \cdot (a/L)$$

$$M(x) = R_a \cdot x - P \cdot (x - a) = P \cdot (b/L) \cdot x - P \cdot (x - a) = P \cdot (b/L - 1) \cdot x + P \cdot a = -P \cdot (a/L) \cdot x + P \cdot a = P \cdot a \cdot (1 - x/L)$$

Representados gráficamente, los diagramas serían:

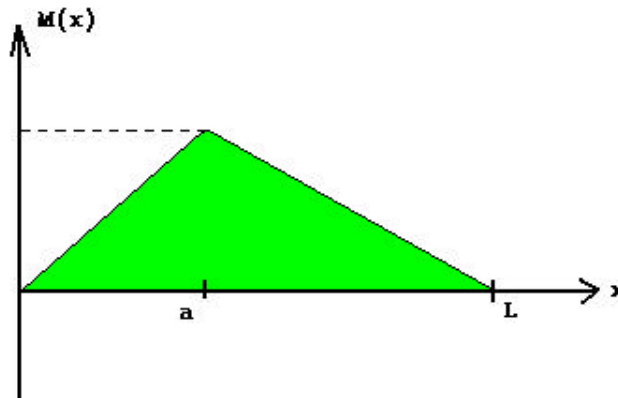


Figura n° 2.11. Diagrama de momento flector.

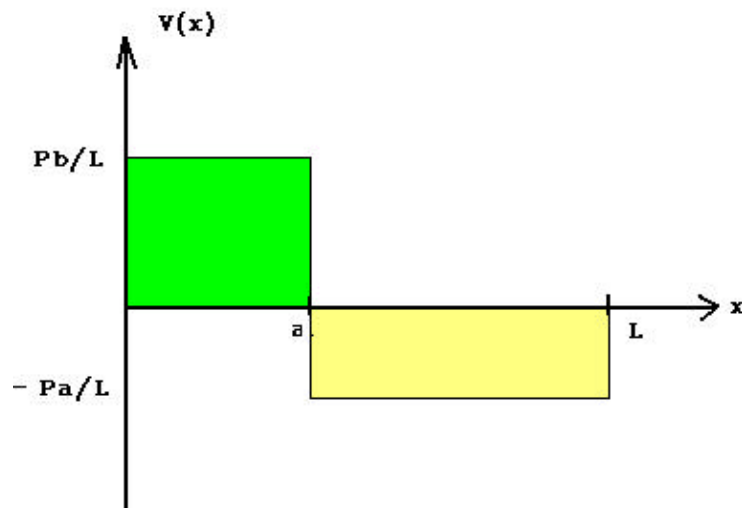


Figura n° 2.12. Diagrama de fuerza cortante

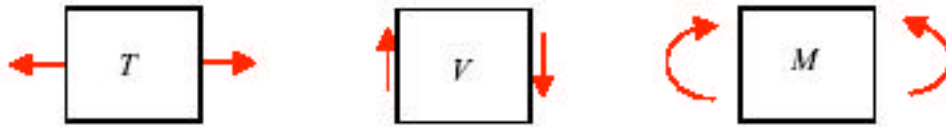


Figura n° 2.13. Definición de fuerza directa, cortante, y momento flector positivos.

Relaciones entre fuerza cortante, momento flector, y carga distribuida.

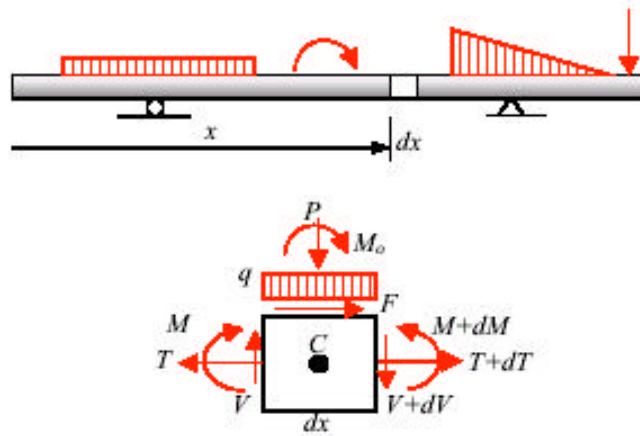


Figura n° 2.14. Elemento diferencial de una viga para el estudio de las relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante, y momento flector.

Dada una viga cargada de forma arbitraria como se representa en la figura, de las relaciones dadas por las ecuaciones cardinales para el estado de equilibrio, pueden obtenerse ecuaciones útiles en el cálculo de diagramas de solicitaciones.

Las cargas mostradas son F, una fuerza directa concentrada (axial, se dibuja rasante por claridad), q una carga distribuida arbitraria, M el momento flector, V la fuerza cortante, P una carga concentrada transversal a la viga, Mo un momento externo aplicado en C.

La variable geométrica es x, y su diferencial dx.

Si consideramos el equilibrio de un elemento diferencial como se muestra en la figura 2.x, se tendrá:

- $\sum F_x=0 \Rightarrow -T+F+(T+dT)=0 \Rightarrow dT=F$
- $\sum F_y=0 \Rightarrow V - P - qdx - (V+dV)=0 \Rightarrow dV = -P-qdx$
- $\sum M_c=0 \Rightarrow -M+M_o + (M+dM) - Vdx=0 \Rightarrow dM=M_o+Vdx$

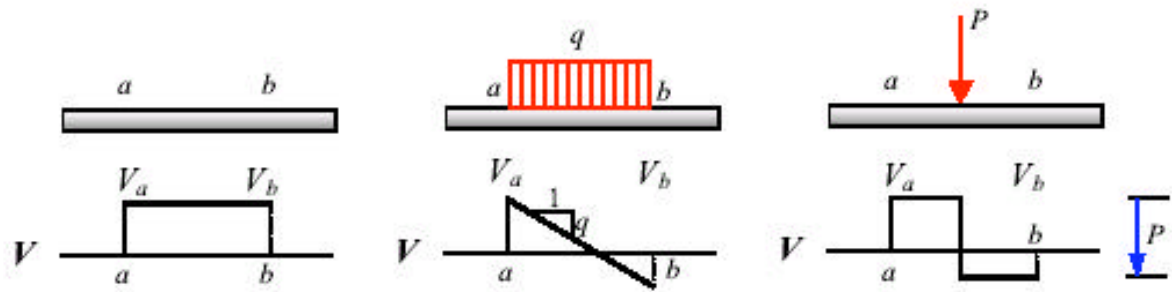


Figura n° 2.15. Fuerza cortante según el estado de carga, y su relación con la carga distribuida.

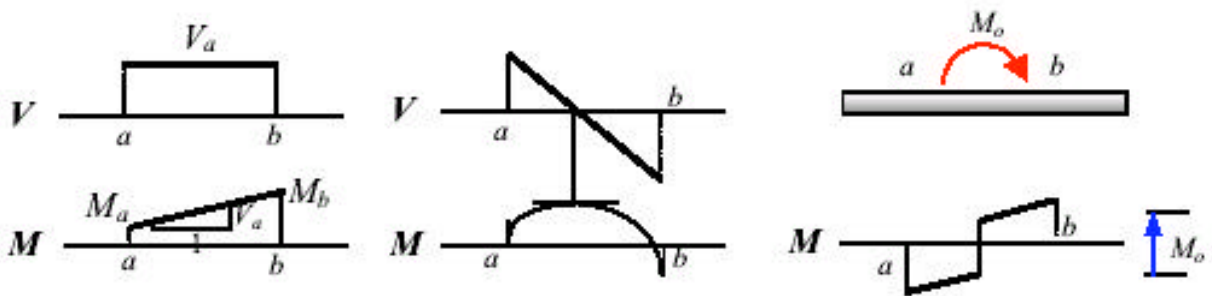


Figura n° 2.16. Momento flector según el estado de carga y su relación con la fuerza cortante.

Se aplican entonces las siguientes ecuaciones según el caso:

$$dV(x)/dx = -q(x), \Rightarrow V(x) = -\int q(x)dx \quad \text{para cargas distribuidas (1)}$$

$$\Delta V = P \quad \text{para cargas concentradas (1a)}$$

$$dM(x)/dx = V, \Rightarrow M(x) = \int V(x)dx \quad \text{para cargas distribuidas (2)}$$

$$\Delta M = M_o, \quad \text{para momentos concentrados (2a)}$$

Así también, de las anteriores:

$$dM(x)/dx = V(x), \Rightarrow d^2M(x)/dx^2 = dV(x)/dx = -q(x).$$

Y vale para el caso de no existir momentos externos aplicados en una porción de la viga entre $x = a$, y $x = b$, la siguiente:

$$M(x) = -\iint q(x) dx dx.$$

En el caso en que M_0 y P son nulos, o para tramos de viga en los cuales no existen momentos externos ni cargas concentradas aplicados, valdrán para dicha porción de la viga entre valores arbitrarios $x = a$, y $x = b$:

$$V(x) = - \int q(x) dx,$$

$$M(x) = \int V(x) dx.$$

$$V_b = V_a - \int_{(a,b)} q(x) dx \quad (4)$$

$$M_b = M_a + \int_{(a,b)} V(x) dx$$

Momento torsor.

El par o momento torsor se produce cuando a un elemento de máquina o estructura (a un cuerpo en general) se le aplican simultáneamente, dos pares de fuerzas T , y T' , de sentido contrario, como se indica en la siguiente figura.

Si estos dos pares son iguales en magnitud, el cuerpo estará en equilibrio rotacional, en torno al eje del mismo, de lo contrario estará aumentando su velocidad angular, en torno a dicho eje.

Este puede ser el caso de un eje de máquina, que se encuentra en un estado transitorio o no de aceleración, y el segundo, en el cual el eje está en estado estacionario, es decir su aceleración angular es nula en dicho instante.

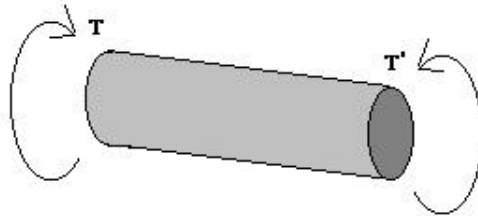


Figura nº 2.17. Definición de momento torsor.

Diagrama de momento torsor.

El diagrama de momento torsor, representa al igual que los demás ya vistos, el estado de carga del cuerpo (elemento de máquina, viga, etc), en particular la presencia de momentos torsionales.

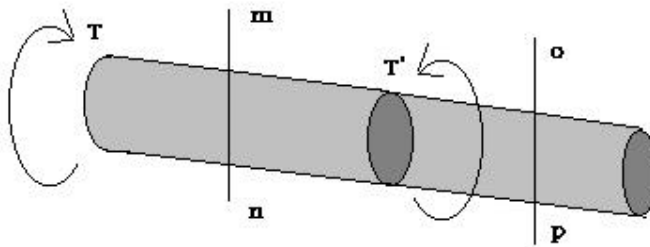


Figura nº 2.18. Momento torsor en diferentes secciones de un eje.

Como se verá en el ejemplo no todas las secciones de un eje como el de la figura estarán sometidas a torsión.
 Si realizamos, un corte por una sección del cuerpo, m-n, para que esta esté en equilibrio, de deberá tener que el momento torsor debido a las fuerzas internas en el eje, será igual al momento externo T.

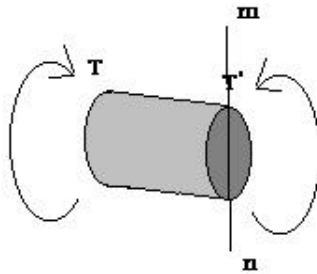


Figura nº 2.19. Momento torsor no nulo en una sección m-n.

En el caso de realizar, el corte en o-p, la sección a la derecha de este no está sometida a momentos torsesores externos (dado que $T=T'$), por lo que en toda di cha región del cuerpo, el momento torsor será nulo.

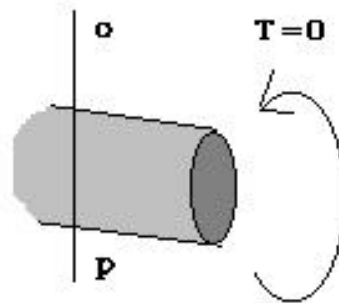


Figura nº 2.20. Momento torsor nulo en una sección o-p.

En este caso el diagrama de momento torsor será el siguiente, dada la distancia entre los momentos aplicados, a:



Figura nº 2.21. Diagrama de momento torsor para el ejemplo dado.

Concepto de esfuerzo.

Definiremos esfuerzo como límite del cociente de la fuerza aplicada sobre el área de una sección cuando esta tiende a cero. Una fuerza cualquiera actuando sobre una sección plana, puede descomponerse en dos componentes: una perpendicular a la sección que dará origen al esfuerzo normal, y otra tangencial que hará lo correspondiente con el esfuerzo cortante.

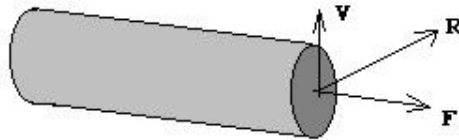


Figura n° 2.22. Definición de fuerza directa y cortante, en una sección de una barra.

Así tendremos:

$$\sigma = \frac{dF}{dA}$$

$$\lim_{dA \rightarrow 0}$$

$$\tau = \frac{dV}{dA}$$

$$\lim_{dA \rightarrow 0}$$

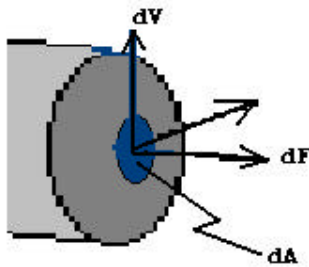


Figura n° 2.23. Definición de esfuerzo normal y cortante, en base al diferencial de área dA .