Práctico 5

Conjuntos Consistentes y Completitud del Cálculo Proposicional

Ejercicio 1

Determine cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes y cuáles no. Justifique.

a. $\{\neg p_1 \land p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_0 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
b. $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$
c. $\{p_0, p_1, p_1 \to \neg p_0\}$
d. $\{p_0 \to p_1, p_0 \land p_2 \to p_1 \land p_3, p_0 \land p_2 \land p_4 \to p_1 \land p_3 \land p_5, \ldots\}$
e. $\{p_0, \neg p_1 \land p_2, p_1 \to \neg p_2\}$

Ejercicio 2

a. Demuestre que el conjunto $\emptyset$ es consistente y que `PROP` es inconsistente.
b. Dé dos conjuntos consistentes, uno de cardinal finito, no vacío y otro de cardinal infinito. Justifique su respuesta.
c. Dé dos conjuntos inconsistentes, uno de cardinal finito mayor que uno y otro, distinto de `PROP`, de cardinal infinito. Justifique su respuesta.
d. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa, justificando en cada caso.
   I. Para todo Γ y Δ subconjuntos consistentes de `PROP`, $\Gamma \cup \Delta$ es consistente.
   II. Para todo Γ y Δ subconjuntos de `PROP`, si Γ es consistente y Δ es inconsistente, entonces $\Gamma \cap \Delta$ es consistente.

Ejercicio 3

Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a. El conjunto $\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$ es inconsistente
b. $\vdash \neg(\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n)$
c. $\vdash \varphi_2 \land \ldots \land \varphi_n \to \neg\varphi_1$

Ejercicio 4 (Teorema de compacidad)

Demuestre que un conjunto Γ es consistente si y sólo si todo subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ es consistente.

Observación Γ es inconsistente si y solo si existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente.

Ejercicio 5

Sea $\Gamma \subseteq$ `PROP` un conjunto consistente. Pruebe que:

Γ es consistente maximal si y sólo si para toda $\varphi \in$ `PROP` se cumple que $\varphi \in \Gamma$ o $\neg\varphi \in \Gamma$.

Ejercicio 6

Un conjunto Γ es completo si y sólo si es consistente y para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

a. Demuestre que el conjunto $\{p_0, p_1\}$ no es completo.
b. Demuestre que el conjunto $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ es completo.
c. De un conjunto R, $R \subseteq \texttt{PROP}$, $R \cap P = \emptyset$ tal que R es completo.

Ejercicio 7

Demuestre que $\textsc{Cons}(\Gamma) = \{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ es consistente maximal si y sólo si Γ es completo.

Ejercicio 8

Un conjunto Γ es una teoría si y sólo si $\textsc{Cons}(\Gamma) \subseteq \Gamma$.

a. Dé dos conjuntos Γ_1 y Γ_2 que sean teorías.
b. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. Justifique su respuesta:

   - Si Γ es teoría entonces Γ es consistente.
   - Si Γ es teoría entonces Γ es inconsistente.
   - Si Γ es una teoría inconsistente entonces $\Gamma = \texttt{PROP}$.
   - $\textsc{Cons}(\Gamma)$ es consistente si y sólo si Γ es consistente.

Ejercicio 9

Sea $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$. Demuestre que Γ es consistente maximal si y sólo si Γ es una teoría y además existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.
(Nota: $v(\Gamma) = 1$ denota que para toda $\varphi \in \Gamma$ se cumple que $v(\varphi) = 1$)

Ejercicio 10

a. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   I. Γ es completo.
   II. Γ es consistente y para cualquier $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \psi$.
b. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   I. Γ es consistente maximal.
   II. Γ es una teoría consistente y para cualquier $\varphi, \psi \in \texttt{PROP}$ se cumple que: $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Ejercicio 11

Decimos que φ es independiente de Γ si $\Gamma \nvdash \varphi$ y $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.

a. Dé un conjunto Γ y una fórmula φ tales que φ sea independiente de Γ. Justifique su respuesta.
b. Demuestre que $p_1 \to p_2$ es independiente de $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0\}$

Ejercicio 12

Dados los siguientes conjuntos:

- $\Gamma_k = \{p_i : i \text{ es múltiplo de } k\}$
- $\Delta_k = \{\neg p_i : i \text{ no es múltiplo de } k\}$

a. Demuestre que

   I. $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\Gamma_k \nvdash \bot$
   II. $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\Delta_k \nvdash \bot$
   III. $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$si $n < m$ y $n > 0$ entonces $\Gamma_n \cup \Delta_m \vdash \bot$
   (Observar que n no es múltiplo de m.)

b. Indique si se cumple la siguiente afirmación. Demuestre o dé un contraejemplo según corresponda.

$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\text{CONS}(\Gamma_k \cup \Delta_k) \text{ es consistente maximal.}$$

Ejercicio 13

Sea $P = \{p_i \mid i \in N\}$ el conjunto de letras proposicionales. Para cada $I \subseteq N$ considere el conjunto $L(I) = \{p_i \mid i \in I\} \cup \{\neg p_i \mid i \notin I\}$

a. Pruebe que $L(\{2\}) \cup \{p_0\}$ es inconsistente.
b. Pruebe que para todo $I \subseteq N$, $\text{CONS}(L(I))$ es consistente maximal.

Ejercicio 14

Considere el siguiente conjunto $\Gamma = \{p_0, p_1\}$

a. Pruebe que $\neg p_2 \notin Cons(\Gamma)$.
b. Defina una teoría T consistente que cumpla las siguientes condiciones:

   - $Cons(\Gamma) \subset T$
   - $\neg p_2 \in T$
   - T no es consistente maximal.

   Justifique su respuesta.
c. Defina un conjunto consistente maximal Δ_0 tal que $T \subset \Delta_0$.
d. Defina un conjunto consistente maximal Δ_1 tal que $\Gamma \subset \Delta_1$ pero $T \not\subseteq \Delta_1$.
e. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   I. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es teoría.
   II. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es consistente.

   Justifique su respuesta.

Ejercicio 15

Considere un conjunto infinito $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\} \subseteq \texttt{PROP}$. Demuestre que si para toda valuación v existe un natural n tal que $v(\varphi_n) = 1$, entonces existe un natural m tal que $\vdash \neg(\neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_m)$. Sugerencia: aplique el teorema de compacidad.

Ejercicio 16

Considere el lenguaje proposicional $\mathcal{L}_0$ con una única letra proposicional: p_0 y conectivos $\{\wedge, \vee\}$.

a. De una definición inductiva de $\mathcal{L}_0$.
b. Considere la definición de valuación de forma análoga a `PROP`. ¿Cuántas valuaciones distintas existen?
c. Análogamente a `PROP` se define

$$\alpha \ \texttt{eq} \ \beta \text{ si y solo si } (\bar{\forall} v : \mathit{valuacion}) v(\alpha) = v(\beta)$$

Demuestre que para cualquier $\alpha \in \mathcal{L}_0$, $\alpha \ \texttt{eq} \ p_0$.

d. Se define un cálculo $\texttt{DER}_0$, y se pretende demostrar la corrección y completitud de $\mathcal{L}_0$ con el cálculo $\texttt{DER}_0$.

a) Si $\varphi \in \mathcal{L}_0$, entonces $\varphi \in \texttt{DER}_0$

b) Si $\begin{array}{c} \Gamma \\ \bigvee \\ \varphi \end{array} \in \texttt{DER}_0$, entonces $\begin{array}{c} \Gamma \\ \bigvee \\ \dfrac{\varphi}{p_0} \end{array} \in \texttt{DER}_0$

c) Si $\begin{array}{c} \Gamma \\ \bigvee \\ p_0 \end{array} \in \texttt{DER}_0$ y $\varphi \in \mathcal{L}_0$, entonces $\begin{array}{c} \Gamma \\ \bigvee \\ \dfrac{p_0}{\varphi} \end{array} \in \texttt{DER}_0$

Para cualquier derivación $\mathcal{D} \in \texttt{DER}_0$ se definen, análogamente a `DER`, el conjunto de hipótesis Hip(D) y la conclusión Conc(D). Asimismo, se define la relación $\Gamma \vdash \varphi$.

I. Demuestre que para cualquier $\varphi \in \mathcal{L}_0$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ si y solamente si $\Gamma \neq \emptyset$.
II. Demuestre que el sistema es correcto y completo, es decir,

$$\text{para cualquier } \varphi \in \mathcal{L}_0 \text{ y } \Gamma \subseteq \mathcal{L}_0 : \quad \Gamma \vdash \varphi \text{ si y solamente si } \Gamma \models \varphi.$$

Ejercicio 17

Se considera $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$.
En el teórico se dan las definiciones de **conjunto consistente** y **consistente maximal** basados en la relación de derivación $\vdash$. También se dan caracterizaciones equivalentes expresadas en términos semánticos:

Caracterización semántica de la consistencia. Γ es consistente si y solo si existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$

Caracterización semántica de la consistencia maximal. Γ es consistente maximal si y solo si existe una valuación v tal que $\Gamma = \{\varphi \in \texttt{PROP} \mid v(\varphi) = 1\}$

Demostrar la siguiente caracterización semántica para la definición de **conjunto completo** vista en el ejercicio 6:

Caracterización semántica de completitud. Γ es **completo** si y solo si existe una **única** valuación v que cumple $v(\Gamma) = 1$.