Práctico 4
Deducción Natural - Lógica Proposicional

Ejercicio 1

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Construya derivaciones que demuestren que las siguientes proposiciones son teoremas del cálculo proposicional.

a. $\varphi \to \varphi$
b. $\bot \to \varphi$
c. $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
d. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
e. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
f. $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \to \neg\psi)$
g. $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \sigma))$
h. $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
i. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$
j. $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$
k. $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$

Ejercicio 2

a. Dada la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\neg\varphi}\,E\to \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\neg\varphi}\,I\neg(1)}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,I\to$$

Dé Γ y ρ tales que la derivación anterior justifique que $\Gamma \vdash \rho$. Dé tres conjuntos Γ distintos.

b. Idem la parte a.) para la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to \neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^1}{\neg\varphi}\,E\to \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\neg\varphi}\,I\neg(1)}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,I\to(2)$$

c. Idem la parte a.) para la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to \neg\varphi]^2 \quad \varphi}{\neg\varphi}\,E\to \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\neg\varphi}\,I\neg(1)}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,I\to(2)$$

Ejercicio 3

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Demuestre que:

a. $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
b. $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
c. $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$
d. $\neg\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\varphi$
e. $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$
f. $\vdash \varphi \vee \psi \to \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
g. Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$
h. Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \to \varphi$

Ejercicio 4

Complete la siguiente derivación de forma tal que a partir de ella sea posible afirmar que:
$\vdash ((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\psi \wedge \gamma)) \to (\varphi \to \neg\gamma)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\psi \wedge \gamma) \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi} \qquad \gamma}{\psi \wedge \gamma}}{\bot}}{\neg\gamma}}{\varphi \to \neg\gamma}$$

Ejercicio 5

Se pretende demostrar que $\neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3) \vdash (p_2 \vee p_3) \to p_1$ para lo cual se construye la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3) \quad [\neg p_1]^1}{\neg p_2 \wedge \neg p_3}\, E\to}{\neg p_2}\, I\wedge \qquad \dfrac{[p_2 \vee p_3]^2}{p_2}\, E\vee}{\bot}\, I\bot}{p_1}\, RAA(1)}{(p_2 \vee p_3) \to p_1}\, I\to(2)$$

Determine si la derivación es correcta. En caso de no serlo indique los errores y construya una derivación que permita demostrar la afirmación.

En caso de ser correcta demuestre que la derivación pertenece a DER.

Ejercicio 6

Se define un cálculo $\mathtt{DER}_0$ de la siguiente forma:

1. Si $\varphi \in \mathtt{PROP}$, entonces $\varphi \in \mathtt{DER}_0$
2. Si $\begin{array}{c}\Gamma\\ \bigvee\\ \varphi\end{array} \in \mathtt{DER}_0$, entonces $\begin{array}{c}\Gamma\\ \bigvee\\ \dfrac{\varphi}{p_0}\end{array} \in \mathtt{DER}_0$
3. Si $\begin{array}{c}\Gamma\\ \bigvee\\ p_0\end{array} \in \mathtt{DER}_0$ y $\varphi \in \mathtt{PROP}$, entonces $\begin{array}{c}\Gamma\\ \bigvee\\ \dfrac{p_0}{\varphi}\end{array} \in \mathtt{DER}_0$

El tamaño $s(\mathcal{D})$ de una derivación $\mathcal{D} \in \mathtt{DER}_0$ es la cantidad de reglas aplicadas en $\mathcal{D}$. Dé una definición recursiva de $s(\mathcal{D})$.

Ejercicio 7

Sean φ, ψ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Demuestre que:

a. $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$

b. $\vdash \varphi \vee \varphi \to \varphi$

c. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

d. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

e. $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

f. $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

Ejercicio 8

a. Dada la siguiente afirmación: $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$ complete las siguientes derivaciones de forma tal que justifiquen la afirmación dada:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\varphi\vee\psi)\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\quad}}{\perp}}{\neg\psi}}{\quad}}{\quad}}{\varphi}}{\quad}}{\perp}}{\varphi\vee\psi}}{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\to\varphi\vee\psi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\quad}}{\quad}}{\quad}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\quad}}{\quad}}{\quad}}{\quad}}{\perp}}{\varphi\vee\psi}}{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\to\varphi\vee\psi}$$

b. Demuestre que: Si $\varphi \vdash \sigma$ y $\psi \vdash \sigma$ entonces $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \sigma$.

Ejercicio 9

a. Dé una definición inductiva de la relación $\vdash$, o sea, defina inductivamente una relación $R \subseteq Pot(PROP) \times PROP$ tal que $(\Gamma, \varphi) \in R$ se cumple cuando $\Gamma \vdash \varphi$.
b. Muestre que la definición de R no es libre.
c. Demuestre que $(\Gamma, \varphi) \in R$ ssi $\Gamma \vdash \varphi$
d. Pruebe (usando c.) que para todo $\Gamma \subseteq PROP$ y para toda $\varphi \in PROP$ tales que: $(\Gamma, \varphi) \in R(\Gamma, \varphi)$ existe un conjunto finito Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, tal que también se cumple $(\Gamma', \varphi) \in R$.

Ejercicio 10

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a. $\vdash \neg\bot$
b. $\vdash \varphi$ ssi $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\bot$
c. $\vdash \neg\varphi$ ssi $\vdash \varphi \leftrightarrow \bot$
d. $\vdash \bot \vee \neg\bot$
e. $\vdash (\varphi \leftrightarrow \neg\bot) \vee (\varphi \leftrightarrow \bot)$
f. $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\bot)$

Ejercicio 11

Considere las siguientes reglas de un club escocés:

Regla 1. Todo miembro no escocés deberá usar medias rojas.

Regla 2. Todo miembro que use medias rojas deberá usar un kilt.

Regla 3. Todo miembro que tenga barba no podrá ingresar los sábados.

Regla 4. Todo miembro escocés deberá usar kilt.

Regla 5. Todo miembro que use kilt deberá ser escocés y tener barba.

Se ha contratado un portero para custodiar el ingreso al club los sábados. De acuerdo al conjunto de reglas, ¿a qué tipo de miembros debe dar ingreso el portero los sábados?

Ejercicio 12

Considere las siguientes reglas extraídas de un manual de patología:

Regla 1. Si el paciente tiene fiebre o el paciente tiene la piel amarillenta, entonces tiene hepatitis o rubeola.

Regla 2. El paciente no tiene rubeola o tiene fiebre.

Regla 3. Si el paciente tiene hepatitis, pero no la rubeola, entonces tiene la piel amarillenta.

En el momento del examen clínico, usted observa los siguientes hechos:

- El paciente no tiene la piel amarillenta.
- El paciente tiene fiebre.

Responda y justifique:

- ¿El paciente tiene rubeola?
- ¿El paciente tiene hepatitis?