

# Módulo 5: Flexión Pura en Viga Doblemente Armada y Análisis de Rotura

Escrito por Agustin Spalvier

5 de abril de 2018

Este documento es un texto de apoyo al estudiante de Hormigón Estructural 1 y no reemplaza la lectura de la bibliografía recomendada ni la asistencia a clase.

## 1. Clase 1

### 1.1. Repaso: V.S.A. en flexión pura

En clases previas desarrollamos los métodos de diseño y comprobación de secciones sometidas a flexión pura, utilizando solamente armadura en tracción. Este tipo de elementos los denominamos genéricamente viga simplemente armada (V.S.A.). Recordemos que una sección en flexión pura, necesariamente debe de tener un plano de deformación asociado a los dominios 2, 3 o 4.

Recordemos que existe una forma sencilla de resolución (dimensionado o comprobación) de V.S.A en flexión pura que consiste en utilizar las conocidas ecuaciones adimensionadas

$$\omega_1 = 0,8\zeta, \quad (1)$$

$$\mu = \omega_1 (1 - 0,5\omega_1) \quad (2)$$

siendo  $\zeta = x/d$ , donde  $x$  es la posición de la línea neutra y  $d$  es la altura útil,  $\mu$  es el momento reducido calculado como

$$\mu = \frac{M}{bd^2f_{cd}} \quad (3)$$

y  $\omega_1$  es la cuantía mecánica calculada como

$$\omega_1 = \frac{A_{s1}f_{yd}}{bdf_{cd}}, \quad (4)$$

siendo  $b$  el ancho de la sección,  $f_{yd}$  y  $f_{cd}$  la resistencia de diseño de acero y hormigón, respectivamente, y  $A_{s1}$  el área de armadura de tracción.

Observemos entonces que las variables de las ecuaciones adimensionales representan parámetros directamente relacionados a la física del problema. En otras palabras,  $\mu$  representa el momento flector

de la sección (ya sea el momento aplicado o el último),  $\omega_1$  representa el área de armadura de acero traccionada, y  $\zeta$  la posición de la línea neutra.

Recordemos que las ecuaciones adimensionales fueron obtenidas a través de la utilización de las dos ecuaciones de equilibrio, o sea que en definitiva no son más que ecuaciones de equilibrio enmascaradas, que relacionan variables adimensionadas. Las mismas facilitan la resolución manual de los problemas y por eso las usaremos en este curso.

En un problema de comprobación, donde conocemos la armadura y queremos hallar el momento último, podemos calcular  $\omega_1$  con la ecuación (4), luego aplicar directamente la ecuación (2) y obtener  $\mu$ , con quien podemos calcular el momento último ( $M$ ) aplicando la ecuación (3).

En un problema de dimensionado, donde conocemos el momento de diseño (o sea que podemos calcular  $\mu$ ) y queremos calcular  $A_{s1}$ , necesitamos despejar  $\omega_1$  en función de  $\mu$ , de la ecuación (4). Vimos anteriormente que de las dos posibles soluciones que aparecen al hacer el despeje nos quedamos con

$$\omega_1 = 1 - \sqrt{1 - 2\mu}. \quad (5)$$

Una vez calculado  $\omega_1$  podemos calcular rápidamente  $A_{s1}$ .

La ecuación (5) vincula entonces a  $\mu$  y  $\omega_1$ . Existe un límite de aplicación de esta ecuación, que es cuando la armadura inferior deja de estar en fluencia al momento de rotura. Es decir, cuando el plano de deformaciones deja de estar en dominio 3 para pasar al 4. Queremos hallar los momentos reducidos  $\mu$  y cuantías mecánicas  $\omega_1$  en donde la ecuación (5) es válida. Para ello, podemos calcular la posición de la línea neutra adimensional  $\zeta$  a partir de semejanza de triángulos del diagrama de deformaciones límite asociado al límite entre los dominios 3 y 4. Es decir, la zona comprimida de hormigón presenta deformación  $3,5 \cdot 10^{-3}$  y el acero presenta deformación de fluencia  $\epsilon_y$ . Para el caso en que usemos acero de resistencia  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_y = 2,17 \cdot 10^{-3}$ , por lo que obtenemos  $\zeta = 0,617$ . Utilizando, las ecuaciones adimensionales, podemos obtener los valores de  $\mu$  y  $\omega_1$  asociados a dicho valor de  $\zeta$ , obteniendo  $\mu = 0,372$  y  $\omega_1 = 0,494$ . La figura 1 una gráfica de  $\omega_1$  en función de  $\mu$ , destacando dicho límite.

Observemos que el límite de aplicación de la ecuación (5) corresponde a  $\zeta = 0,617$ , es decir, la línea neutra ubicada en  $x = 0,617d$ . Esto corresponde a un plano de deformación límite con baja ductilidad. La ductilidad es fundamental para permitir la redistribución de esfuerzos en elementos hiperestáticos, y es particularmente beneficiosa puesto que las secciones dúctiles, cuando rompen, lo hacen "con aviso". La ductilidad de una sección en rotura está directamente relacionada con las deformaciones totales que la misma sufre antes de romper. Un parámetro directamente relacionado con la ductilidad es entonces, la curvatura de la sección en rotura, o sea, la inclinación del plano de deformaciones límite. Cuanto mayor inclinación, mayores deformaciones, y mayor ductilidad. En otras palabras, la curvatura es directamente proporcional a la ductilidad de la sección. Como la curvatura está relacionada inversamente con la posición de la línea neutra, concluimos que la posición de la línea neutra es inversamente proporcional a la ductilidad de una sección en rotura.

A partir de las recomendaciones de la bibliografía, en este curso adoptaremos que, al momento del diseño, no permitiremos que la línea neutra descienda más allá de  $0,45d$ . Es decir,  $\zeta \leq 0,45$ . Para dicho valor de  $\zeta$ , podemos utilizar las ecuaciones adimensionales para obtener  $\mu = 0,295$  y  $\omega_1 = 0,360$ .

En definitiva, cuando querramos diseñar una sección simplemente armada en flexión pura, primero calcularemos el momento reducido  $\mu$ . Si el mismo es menor o igual a  $0,295$ , podremos continuar y armar la sección. En caso contrario, dicho momento es superior al que la sección es capaz de tomar para mantener la posición de la línea neutra en la zona recomendada. En estos casos, estudiaremos

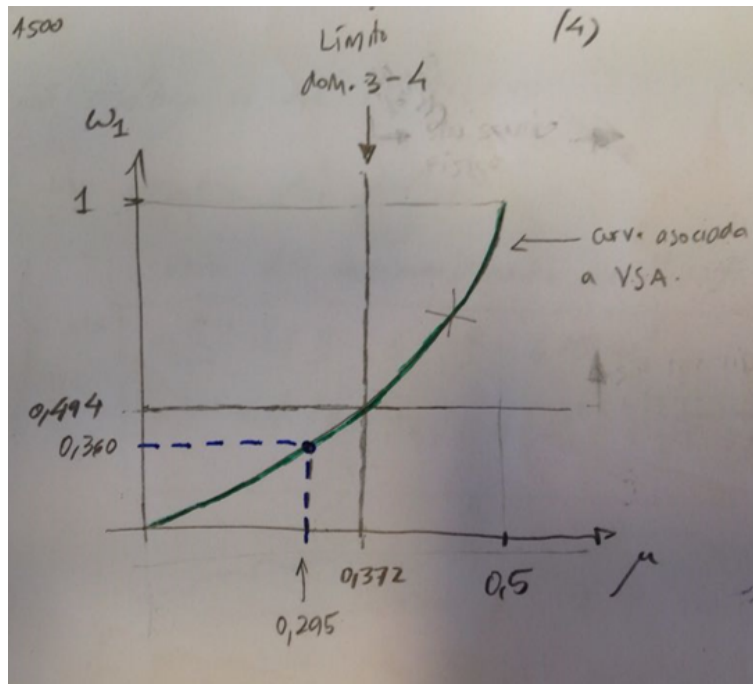


Figura 1: Relación entre el momento reducido  $\mu$  y la cuantía mecánica  $\omega_1$  en una viga simplemente armada en flexión pura. Línea continua marca límite de aplicación. Línea a trazos marca límite de aplicación recomendada.

la posibilidad de utilizar secciones doblemente armadas. En dichos casos, colocaremos armadura de compresión tal que la línea neutra se mantenga en  $0,45d$ .

## 1.2. Desarrollo de V.D.A. en flexión pura

Estudiaremos ahora los métodos de dimensionamiento y comprobación de vigas doblemente armadas (V.D.A.) en flexión pura. Este tipo de armado es menos frecuente que el de V.S.A. porque suele ser menos económico. Aún así, la ventaja del uso de armadura de compresión es que permite continuar aumentando el momento último resistente de una sección pero manteniendo la ductilidad de la misma (posición de la línea neutra) en la zona recomendada (menor o igual que  $0,45d$ ).

Procederemos a realizar las mismas acciones que en el caso del análisis de V.S.A., es decir, vamos a plantear las ecuaciones de equilibrio de la sección. En este caso, cuando queremos dimensionar, se nos agrega una incógnita adicional, que es el área de armadura comprimida  $A_{s2}$ . Sin embargo, al fijar la posición de la línea neutra en  $x = 0,45d$ , llegamos nuevamente a un sistema de dos ecuaciones (equilibrio) y dos incógnitas ( $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ ). En casos de comprobación nuestras incógnitas continuarán siendo el momento último y la posición de la línea neutra,  $M$  y  $x$ , respectivamente.

La figura 2 muestra un diagrama de equilibrio de esfuerzos en la sección de estudio.

Para el resto del desarrollo, consideraremos que la armadura comprimida y traccionada son del mismo material, y que ambas se encuentran en fluencia. La hipótesis de que la armadura comprimida está en fluencia es válida para secciones de recubrimientos normales. Dada la compatibilidad de deformaciones existente, es posible dividir el problema en dos "situaciones", I y II, las cuales, al sumarse, componen la situación original. La figura 3 muestra la separación del equilibrio en dos situaciones, en donde se

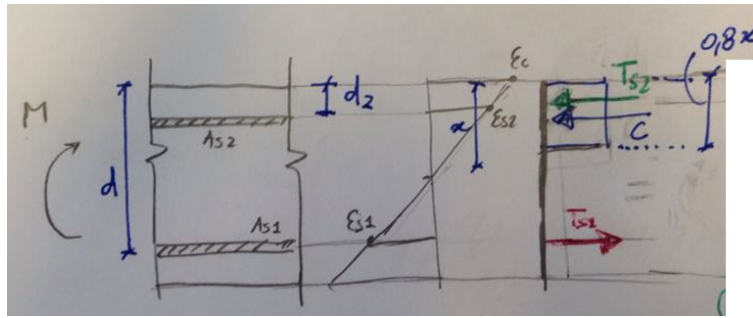


Figura 2: Esquema de equilibrio de esfuerzos externos e internos en sección doblemente armada.

cumple

$$M = M^I + M^{II}, \quad (6)$$

$$T_{s1} = T_{s1}^I + T_{s1}^{II}. \quad (7)$$

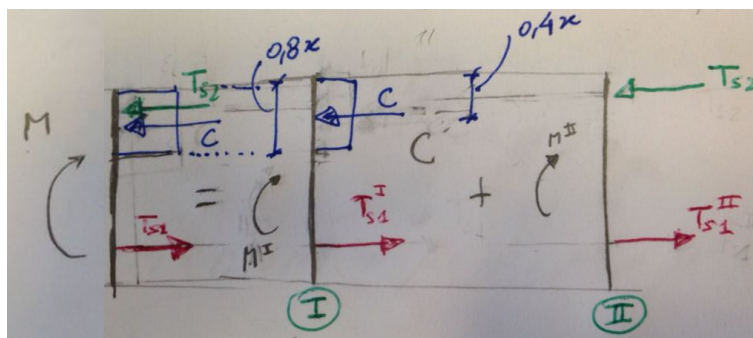


Figura 3: Separación de situaciones de equilibrio de esfuerzos externos e internos en sección doblemente armada.

De la figura 3, queda claro que la situación I puede analizarse como una V.S.A. puesto que no contiene armadura comprimida, y que la situación II es fácilmente resoluble dado que el brazo de par es invariante. Teniendo esto en cuenta, ahora procedemos a evaluar una situación general de dimensionamiento. Luego encontraremos las ecuaciones adimensionales generales, y finalmente mostraremos cómo aplicarlas en casos de dimensionado y comprobación.

### 1.2.1. Dimensionado general de VSA o VDA

En un caso de dimensionado en flexión pura se trata de encontrar las áreas de acero traccionado y comprimido (si fuese necesario), a partir de un momento flector de diseño conocido. Primero intentaremos diseñar una V.S.A. y si la línea neutra queda en la zona no recomendada, fijaremos la misma a  $0,45d$  y diseñaremos una V.D.A.

Conocido  $M$ , calculamos  $\mu$ . Si,  $\mu \leq 0,295$ , entonces procedemos como ya sabemos diseñando la V.S.A. En caso contrario, fijamos  $\zeta = 0,45$ , entonces calculamos

$$\mu^{II} = \mu - \mu^I = \mu - 0,295.$$

Dicha ecuación proviene de la ecuación

$$\mu = \mu^I + \mu^{II}, \quad (8)$$

que a su vez se obtiene de dividir la ecuación (6) entre  $bd^2f_{cd}$ . Los parámetros  $\mu^I$  y  $\mu^{II}$  son los momentos reducidos asociados a las situaciones I y II, respectivamente, calculados análogamente a la ecuación (3), pero usando  $M^I$  o  $M^{II}$ , según corresponda. Observemos que  $\mu^I = 0,295$ . Esto ocurre puesto la situación I corresponde a una situación de armado simple, y ya que fijamos  $\zeta = 0,45$ , obtenemos dicho valor de  $\mu^I$ . Siguiendo el mismo razonamiento, obtenemos  $\omega_1^I = 0,36$ .

Una vez conocido el valor de  $\mu^{II}$ , podemos calcular  $M^{II}$  a partir de la definición de  $\mu$  (multiplicando por  $bd^2f_{cd}$ ). Luego por equilibrio en la situación II sabemos que

$$\begin{aligned} T_{s2} = T_{s1}^{II} &\Rightarrow A_{s2} = A_{s1}^{II} \\ M^{II} = T_{s2}(d - d_2) &\Rightarrow T_{s2} = \frac{M^{II}}{d - d_2} \Rightarrow A_{s2} = \frac{M^{II}}{f_{yd}(d - d_2)}. \end{aligned}$$

Una vez calculado  $A_{s2}$ , podemos calcular

$$A_{s1} = A_{s1}^I + A_{s1}^{II} = A_{s1}^I + A_{s2}.$$

### 1.2.2. Desarrollo de ecuaciones adimensionales en VDA

Ya tenemos las ecuaciones de "compatibilidad" entre situaciones (6) y (7). De dichas ecuaciones, podemos deducir, por un lado la ya explicada ecuación (8), y por otro

$$\begin{aligned} T_{s1} = T_{s1}^I + T_{s1}^{II} &\Rightarrow A_{s1}f_{yd} = A_{s1}^I f_{yd} + A_{s1}^{II} f_{yd} \Rightarrow \\ \frac{A_{s1}f_{yd}}{bdf_{cd}} &= \frac{A_{s1}^I f_{yd}}{bdf_{cd}} + \frac{A_{s1}^{II} f_{yd}}{bdf_{cd}} \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \omega_1^I + \omega_1^{II}. \quad (9)$$

Analizando la situación I, la misma corresponde a un caso de V.S.A. sometida a un momento flector  $M^I$ , en donde la armadura de tracción, representada por su cuantía, puede ser calculada a partir de la ecuación (9)

$$\omega_1^I = \omega_1 - \omega_1^{II}.$$

Considerando esa diferencia, en la situación I obtenemos las ecuaciones adimensionales iguales a como en una situación de V.S.A:

$$\omega_1^I = 0,8\zeta, \quad (10)$$

$$\mu^I = \omega_1^I (1 - 0,5\omega_1^I) \Rightarrow \omega_1^I = 1 - \sqrt{1 - 2\mu^I}. \quad (11)$$

El equilibrio en la situación II es más simple, quedando

$$T_{s2} = T_{s1}^{II} \quad (12)$$

$$M^{II} = T_{s2}(d - d_2) \quad (13)$$

Con la ecuación (12), asumiendo ambas armaduras en fluencia y dividiendo entre  $bd^2f_{cd}$ , obtenemos

$$\omega_2 = \omega_1^{II}. \quad (14)$$

Con la ecuación (13), la dividimos entre  $bd^2f_{cd}$  para obtener

$$\begin{aligned} M^{II} &= T_{s2}(d - d_2) = f_{yd}A_{s2}(d - d_2) \Rightarrow \\ \frac{M^{II}}{bd^2f_{cd}} &= \frac{f_{yd}A_{s2}}{bdf_{cd}} \frac{(d - d_2)}{d} \Rightarrow \\ \mu^{II} &= \omega_2 (1 - \delta') \Rightarrow \end{aligned}$$

sustituyendo la ecuación (8) obtenemos

$$\omega_2 = \frac{\mu - \mu^I}{1 - \delta'}. \quad (15)$$

Sustituyendo, la ecuación (11) en (15), y luego sustituyendo la ecuación (10), obtenemos

$$\omega_2 = \frac{\mu - 0,8\zeta(1 - 0,4\zeta)}{1 - \delta'}. \quad (16)$$

En resumen, las ecuaciones adimensionales generales son

$$\begin{aligned} \omega_1^I &= 0,8\zeta, \\ \mu^I &= \omega_1^I (1 - 0,5\omega_1^I) \Rightarrow \omega_1^I = 1 - \sqrt{1 - 2\mu^I}, \\ \omega_2 &= \frac{\mu - \mu^I}{1 - \delta'} = \frac{\mu - 0,8\zeta(1 - 0,4\zeta)}{1 - \delta'}, \\ \omega_1 &= \omega_1^I + \omega_2 \end{aligned}$$