Práctico 3

Semántica de la Lógica Proposicional

Ejercicio 1 (Tautologías)

Investigue cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías.

a. $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \to p)$
b. $(p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$
c. $\bot \to p$
d. $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$

Ejercicio 2 (Tautologías e implicación)

Coloque letras proposicionales en lugar de ¿? de forma de que la fórmula obtenida sea una tautología. ¿Puede realizar esta tarea en todos los casos? Justifique.

a. $p \to$ ¿?
b. $(p \to q) \to ((q \to$ ¿?$) \to (p \to r))$
c. $(p \to (q \to r)) \to ($¿? $\to (p \to$ ¿?$))$
d. $(p \to q) \to$ ¿?
e. $(p \to (q \to r)) \to (($¿? $\to q) \to (p \to r))$
f. $((p \to q) \to p) \to$ ¿?

Ejercicio 3 (Tautologías)

Considere φ, ψ, σ pertenecientes a `PROP`. Demuestre que:

a. $\models (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (contraposición)
b. $\models (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ (transitividad de $\to$)
c. $\models ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ (Ley de Pierce)
d. $\models (\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)) \to \neg\varphi$
e. $\models (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$
f. $\models \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
g. $\models \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$

Ejercicio 4 (Consecuencia semántica)

Considere φ, ψ, σ pertenecientes a `PROP`.

a. Pruebe las siguientes consecuencias lógicas:
   I. $\varphi \models \varphi$
   II. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$
   III. $(\varphi \wedge \psi), (\psi \wedge \sigma) \models (\varphi \wedge \sigma)$

b. Demuestre que:
   I. Si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \sigma$ entonces $\varphi \models \sigma$
   II. Si $\models \varphi \to \psi$ entonces $\varphi \models \psi$

III. Si $\models \neg\varphi$ y $\psi \models \varphi$ entonces $\models \neg\psi$
IV. Si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \neg\psi$ entonces $\Gamma \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$ (donde $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$)

Ejercicio 5 (Conjunto característico)

Considere el conjunto V de todas las valuaciones y la función $\| \ \| : \texttt{PROP} \to Pot(V)$ tal que $\|\varphi\| = \{v \in V / v(\varphi) = 1\}$. Llamamos a $\|\varphi\|$ el conjunto característico de φ.

a. Demuestre que :

I. $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \cup \|\psi\|$
II. $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\|$
III. $\|\neg\varphi\| = \|\varphi\|^c$
IV. $\models \varphi$ ssi $\|\varphi\| = V$
V. $\|\bot\| = \emptyset$
VI. $\models \varphi \to \psi$ ssi $\|\varphi\| \subseteq \|\psi\|$

b. Extendemos la función $\| \ \|$ al conjunto de proposiciones Γ de la siguiente forma:

$$\|\Gamma\| = \{v / (\bar{\forall}\varphi \in \Gamma) v(\varphi) = 1\}.$$

Pruebe que : $\Gamma \models \varphi$ ssi $\|\Gamma\| \subseteq \|\varphi\|$.

Ejercicio 6

Sea $||\Gamma||$ el conjunto de todas las valuaciones v tales que $v(\Gamma) = 1$ y $X = \{\ p_i \mid i\ \geq\ 3\ \}$

a. Hallar n, la cantidad de elementos de $||X||$. Justifique su respuesta.
b. Determine si existe $\varphi \in \texttt{PROP}$ tal que la cantidad de elementos de $||X \cup \{\varphi\}||$ es dos. Justifique su respuesta.
c. Determine la cantidad de elementos $||X \cup \{(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))\}||$. Justifique su respuesta.
d. Demuestre que $X \not\models \neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$.

Ejercicio 7

a. I. Sea $\varphi \in \texttt{PROP}$ y v una valuación tal que $v(\varphi) = 1$.
¿Qué debe cumplir v para que exista $i \in \mathbb{N}$ tal que $v(\varphi \to p_i) = 1$?
II. Sea $\varphi \in \texttt{PROP}$ y v una valuación tal que $v(\varphi) = 0$.
¿Existe $i \in \mathbb{N}$ que $v(\varphi \to p_i) = 0$?
III. Sea v una valuación tal que $v(p_7) = 1$.
¿Existe $\varphi \in \texttt{PROP}$ que cumpla $v(\varphi \to p_7) = 0$?

b. I. De los siguientes conjuntos de valuaciones hay uno vacío, otro unitario y otro infinito.
Identifique cuál es el caso de cada uno.
Para el unitario indique cuál es la única valuación del conjunto. Para el infinito, escriba otra caracterización de los elementos del conjunto.

- $A_1 = \{v \in valuaciones / (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\exists} i \in \mathbb{N})(v(\varphi \to p_i) = 1)\}$
- $A_2 = \{v \in valuaciones / (\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\exists} i \in \mathbb{N})(v(\varphi \to p_i) = 0)\}$
- $A_3 = \{v \in valuaciones / (\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(v(\varphi \to p_i) = 0)\}$

Ejercicio 8 (Simplificación)

Considere φ, ψ pertenecientes a `PROP`. Simplifique las siguientes proposiciones (esto es, encuentre una proposición equivalente más corta). Justifique cada caso.

a. $(\varphi \to \psi) \land \varphi$
b. $(\varphi \to \psi) \lor \neg\varphi$
c. $(\varphi \to \psi) \to \psi$
d. $\varphi \to (\varphi \land \psi)$
e. $(\varphi \to \psi) \to \varphi$

Ejercicio 9 (Conectivas)

a. Denotamos por "$|$" la barra de Sheffer cuya función de valuación es la siguiente:

$$v(\varphi|\psi) = 0 \text{ sii } v(\varphi) = v(\psi) = 1.$$

Denotamos por "$\downarrow$ " el conectivo cuya función de valuación es la siguiente:

$$v(\varphi \downarrow \psi) = 1 \text{ sii } v(\varphi) = v(\psi) = 0 \text{ (ni } \varphi \text{ ni } \psi)$$

Demuestre que los conjuntos de conectivos $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son funcionalmente completos. (Sugerencia: Pruebe que $(\neg p_1)$ eq $(p_1 \mid p_1)$ y que $(\neg p_1)$ eq $(p_1 \downarrow p_1)$)

b. Considere la conectiva ternaria \$ cuya función de valuación es la siguiente (conectiva mayoría):

$$v(\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = 1 \text{ sii } v(\varphi_1) + v(\varphi_2) + v(\varphi_3) \geq 2$$

Exprese \$ en términos de $\lor$ y $\neg$.

c. Considere el conectivo # cuya función de valuación es la siguiente:

$$v(\varphi \# \psi) = 1 \text{ ssi } v(\varphi) \neq v(\psi)$$

Exprese # en términos de $\lor$ y $\neg$.

d. Demuestre que el conjunto $\{\land, \bot\}$ no es funcionalmente completo. (Sugerencia: Pruebe que ninguna fórmula que use solamente esos conectivos puede ser una tautología).

Ejercicio 10 (Formas normales)

Determine las formas normales conjuntivas y disyuntivas para las siguientes fórmulas:

a. $\neg(p \leftrightarrow q)$
b. $((p \to q) \to q) \to q$
c. $(p \to (p \land \neg q)) \land (q \to (q \land \neg p))$

Ejercicio 11 (Formas normales y criterios)

Indique una condición necesaria y suficiente para que una forma normal conjuntiva sea una tautología. En forma dual, indique una condición necesaria y suficiente para que una forma normal disyuntiva sea una contradicción.

Ejercicio 12 (Más formas normales)

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathtt{PROP}_{\wedge,\vee,\perp,\neg}$ subconjunto de $\mathtt{PROP}$ sin las conectivas $\to, \leftrightarrow$.

b. Defina siguiendo el ERP que corresponde una función $f : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}_{\wedge,\vee,\perp,\neg}$ tal que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP})(\varphi\ eq\ f(\varphi))$. Por ejemplo, $f((p \to q)) = (\neg p \vee q)$.

c. Una fórmula está en forma normal negada si la conectiva $\neg$ solo actúa sobre expresiones atómicas. Defina inductivamente el conjunto FNN subconjunto de $\mathtt{PROP}$ donde todos sus elementos están en forma normal negada.

d. Defina siguiendo el ERP que corresponde función $g : \mathtt{PROP}_{\wedge,\vee,\perp,\neg} \to FNN$ tal que $(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{PROP}_{\wedge,\vee,\perp,\neg})(\varphi\ eq\ g(\varphi))$. Por ejemplo, $g((\neg(p \vee q))) = (\neg p \wedge \neg q)$.

Ejercicio 13 (Orden)

En este ejercicio definimos una relación "$\ll$" entre proposiciones. Definimos la relación $\ll$ de la siguiente manera : $\varphi \ll \psi$ ssi $\models \varphi \to \psi$ y no se cumple $\models \psi \to \varphi$

a. Considere la definición de *conjunto carácterístico* de una proposición dada en el ejercicio 5. Formule una definición alternativa de $\varphi \ll \psi$ expresada en términos de los conjuntos característicos de φ y ψ.

b. Sea $\varphi \in \mathtt{PROP}$ y p_i una variable proposicional que no ocurre en φ. Indique cómo se comportan las proposiciones p_i y φ con respecto a la relación $\ll$. Discuta según φ sea tautología, contradicción o contingencia.

c. Pruebe que la relación "$\ll$" es densa en $\mathtt{PROP}$. Esto es : Para cada φ, ψ tales que $\varphi \ll \psi$, encuentre σ tal que $\varphi \ll \sigma \ll \psi$.

   Se sugiere:

   - Considere una variable p_i que no ocurra en φ ni en ψ.
   - Dibuje un diagrama de Venn de los conjuntos $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ y $\|p_i\|$.
   - Construya $\|\sigma\|$ a partir de $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ y $\|p_i\|$ usando operaciones del álgebra de conjuntos.
   - Obtenga la proposición σ buscada, traduciendo las operaciones de álgebra de conjuntos a conectivos proposicionales de acuerdo con lo visto en el ejercicio 5.

d. Halle un elemento maximal y uno minimal de la relación "$\ll$".

e. Sea la fórmula p_0. Encuentre una secuencia de fórmulas φ_1, φ_2, φ_3, ... tales que $p_0 \ll \varphi_1 \ll \varphi_2 \ll \varphi_3 \ll$ .....

f. Muestre que hay al menos una pareja de fórmulas φ, ψ, no equivalentes, que son incomparables según la relación "$\ll$".

Ejercicio 14 (Sustitución)

Sea φ una fórmula de $\mathtt{PROP}$ y p una letra proposicional.
Por comodidad , escribiremos $\varphi(\sigma)$ en vez de $\varphi[\sigma/p]$ y abreviaremos como $\top$ a la fórmula $\neg\perp$.

a. Sea v una valución y φ_1, φ_2 fórmulas de $\mathtt{PROP}$ tales $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$ demuestre que:

$$(\bar{\forall}\psi \in \mathtt{PROP})(v(\psi(\varphi_1)) = v(\psi(\varphi_2)))$$

   .

b. Utilice el resultado de la parte a. para demostrar las siguientes propiedades:

   I. $\varphi(\top) \models \varphi(\varphi(\top))$
   II. $\varphi(p) \models \varphi(\varphi(\top))$
   III. $\varphi(p), \neg\varphi(\top) \models p \leftrightarrow \bot$
   IV. $\varphi(p), \neg\varphi(\top) \models \varphi(\varphi(\top))$