Optimización bajo Incertidumbre
8. Método de muestreo

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Métodos de Muestreo (Simulación Monte Carlo)

Los métodos de muestreo son una alternativa para la evaluación de la función de recurso (integral multidimensional).

Mediante estimaciones estadísticas se pueden obtener intervalos de confianza sobre los resultados.

Derivaciones del método L:
- Estableciendo cortes mediante muchas muestras por corte.
- Adicionando muchos cortes con pocas muestras en cada iteración (método de descomposición estocástica).

Aproximación mediante media de la muestra

En el caso de un problema de dos etapas, la aproximación de la función de recurso $\mathcal{Q}(x)$ mediante la media de la muestra del parámetro aleatorio $\xi \in \Xi$ es

$$\mathcal{Q}^v(x) := \frac{1}{v}\sum_{k=1}^{v} Q(x, \xi^k),$$

donde $\{\xi^k\}$, $k = 1, ..., v$, es una muestra aleatoria de ξ.

Para el caso de un problema lineal, se tiene el problema aproximado

$$\begin{array}{ll} \min & c^\tau x + \frac{1}{v}\sum_{k=1}^{v} q_k^\tau y_k \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & T_k x + W y_k = h_k, \quad k = 1, ..., v, \\ & x \geq 0, y_k \geq 0, \quad k = 1, ..., v. \end{array}$$

Al incrementar el tamaño de la muestra, v, las soluciones convergen a la solución óptima del problema original con parámetro $\xi \in \Xi$.

Muestreo en el Método L

Los métodos discretos pueden aplicarse al problema aproximado.
Es ineficiente resolver el problema aproximado completamente para aproximaciones no cercanas dado que se desperdician recursos de optimización.

En cambio, es deseable que se use muestreo sin optimización completa; i.e., que ambos procesos se realicen simultáneamente.

Particularmente, se incluye muestreo dentro del método L:

- utilizando muestreo por importancia para reducir la varianza en deducir cada corte (muestras grandes),
- usando una muestra para crear muchos cortes que se actualizan a medida que evoluciona el proceso (método de descomposición estocástica).

Muestreo en método L

Dada la iteración x^s del método, se tiene que $\mathcal{Q}^\nu(x^s) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} Q(x^s, \xi^i)$.

Una estimación de su gradiente, $\nabla\mathcal{Q}^\nu(x^s)$, es $\bar{\pi}_s^\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\pi_s^i$, donde $\pi_s^i \in \partial Q(x^s, \xi^i)$.

Para $\mathcal{Q}(x)$ convexa, se tiene que $Q(x, \xi^i) \geq Q(x^s, \xi^i) + (\pi_s^i)^\tau(x - x^s), \forall x$.

Además, $\mathcal{Q}^\nu(x) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} Q(x, \xi^i) \geq \mathcal{Q}^\nu(x^s) + (\bar{\pi}_s^\nu)^\tau(x - x^s) = LB_s^\nu(x)$.

Por TCL se tiene que $LB_s^\nu(x)$ es asintóticamente distribuida normal con media $\sqrt{n}\big(\mathcal{Q}(x^s) + \nabla\mathcal{Q}(x^s)^\tau(x - x^s)\big)$.

Iteración con muestreo en método L

En la iteración s del método se tienen los coeficientes de cada corte de optimalidad: $E_\ell = -\bar{\pi}_\ell$ y $e_\ell = \mathcal{Q}^v(x^\ell) + (\bar{\pi}_\ell)^\tau(-x^\ell)$, $\ell = 1, ..., s$.

Los cortes de factibilidad se aplican cuando $Q(x^\ell, \xi^i)$ no esta acotada.

La resolución del problema maestro determina las soluciones x^{s+1} y θ^{s+1}.

Intervalos de confianza pueden establecerse basados en características del soporte.

Propiedades sobre la solución óptima aproximada

Para inferir propiedades estadísticas sobre intervalos de confianza en x^* a partir de la observación x^ν, se busca encontrar una distribución u tal que

$$\sqrt{\nu}(x^\nu - x^*) \mapsto u.$$

Bajo ciertas hipótesis de diferenciabilidad de segundo orden de $g(.)$, medida del gradiente y condiciones del hessiano de $g(.)$, se puede obtener u como la solución a un problema cuadrático que, entre otros, involucra el gradiente y la esperanza del hessiano de $g(.)$.

Muestreo por importancia

El muestreo por importancia reemplaza la distribución original de ξ con una distribución alternativa que pone mas peso en las áreas de importancia.

Sea $f(\xi)$ la función de densidad de ξ, se tiene el problema

$$\mathcal{Q}(x) = \int_{\Xi} Q(x,\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Se tiene una nueva densidad $g(\xi)$ tal que $g(\xi) > 0$ cuando $Q(x,\xi)f(\xi) \neq 0$.

A partir de la cual se generan muestras para $\frac{Q(x,\xi)f(\xi)}{g(\xi)}$, y se resuelve el problema

$$\mathcal{Q}(x) = \int_{\Xi} \frac{Q(x,\xi)f(\xi)}{g(\xi)}\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Descomposición Estocástica

Establece un enfoque alternativo en el método L.
Genera muchos cortes con un número pequeño de muestras adicionales en cada corte.

Actualiza los cortes a medida que el algoritmo evoluciona.

Se asume recurso completo, una cota cota inferior de $Q(x,\xi)$, conjunto de soluciones duales acotado, y que K_1 y Ξ son compactos.

Método de Descomposición Estocástica

Paso 1. Establecer $v := 0$ y $\xi^0 := \mathbb{E}[\xi]$. Sea x^1 la solución de

$$\min_{x\in X}\{c^\tau x + Q(x, \xi^0)\}.$$

Paso 2.
Sean $v := v + 1$ y ξ^v una muestra generada de ξ.
Calcular $\mathcal{Q}^v(x^v) = \frac{1}{v}\sum_{s=1}^{v} Q(x^v, \xi^s) = \frac{1}{v}\sum_{s=1}^{v}(\pi_s^v)^\tau(\xi^s - Tx^v)$.
Establecer

$$E^v = \frac{1}{v}\sum_{s=1}^{v}(\pi_s^v)^\tau T \qquad e^v = \frac{1}{v}\sum_{s=1}^{v}(\pi_s^v)^\tau \xi^s$$

Paso 3.
Actualizar los cortes previos $E_s := \frac{v-1}{v}E_s$, $e_s := \frac{v-1}{v}e_s$, para $s = 1, ..., v - 1$.

Paso 4.
Resolver el problema maestro del método L obteniendo x^{v+1}. Ir al Paso 2.

Optimalidad del método de Descomposición Estocástica

La característica del método es que la secuencia de soluciones corrientes contiene una subsecuencia con puntos límites óptimos.

Una forma de identificar una subsecuencia con punto límite óptimo es

- mantener la solución corriente que cambia cuando el valor del objetivo desciende por debajo del mejor valor conocido.
- actualizar la solución corriente si se detecta un decremento importante de la función objetivo.

Además, se necesita algún test estadístico de condición de optimalidad para determinar la parada.