Optimización bajo Incertidumbre
7. Método de aproximación

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Aproximación de la Función de Recurso

La evaluación de la función de recurso, $\mathcal{Q}(x)$, implica la evaluación de una integral multidimensional en las variables aleatorias.

En general, la evaluación se realiza mediante la aproximación de funciones convexas no diferenciables.

Las aproximaciones más comunes consideran cotas de la función.
El objetivo es conseguir progresivamente cotas ajustadas para cierto umbral de tolerancia.

Aproximaciones de Cotas Inferior y Superior

Las aproximaciones más comunes son construidas sobre la discretización de la distribución de probabilidad:

1. *cota inferior* : extensiones de aproximaciones de punto medio
2. *cota superior*: extensiones de aproximaciones trapezoidales

Las cotas se ajustan progresivamente al particionar el soporte de la distribución.
Estas se integran en los algoritmos de resolución (método L)

Aproximaciones de Acotamiento Discretas

Se busca aproximar la distribución original mediante una agregación: partición en conjuntos discretos de realizaciones.

Los mecanismos son basados en:

1. extensión de la *desigualdad de Jensen*; generalización de la aproximación de punto medio.
2. *desigualdad de Edmundson-Madansky* (EM); generalización de la aproximación trapezoidal.

Para funciones convexas de la variable aleatoria:

1. Jensen provee una cota inferior
2. EM provee una cota superior

Acotamiento Inferior

Para el integrando $Q(x, \xi)$, el objetivo es acotar

$$\mathbb{E}_{\xi}[Q(x, \xi)] = \int_{\Xi} Q(x, \xi)\, \mathrm{d}F(\xi)$$

mediante la partición de Ξ en regiones y aplicar cotas en cada región.

Sea $\mathcal{S}^u = \{S^l, l = 1, ..., u\}$ la partición u-ésima de Ξ en regiones S^l, donde $\xi^l = \mathbb{E}[\xi | \xi \in S^l]$ y $p^l = \mathbb{P}[\xi \in S^l]$ conforman la aproximación de distribución P^u para $l = 1, ..., u$.

Teorema (Cota inferior)

Dada $Q(x, \xi)$ convexa en ξ para todo x, entonces

$$\mathbb{E}_{\xi}[Q(x, \xi)] \geq \sum_{l=1}^{u} p^l Q(x, \xi^l).$$

Acotamiento Inferior

Dadas las particiones de Ξ y sus distribuciones discretas, se puede aproximar $\mathcal{Q}(x)$ mediante

$$\mathcal{Q}^u(x) = \sum_{l=1}^{u} p^l Q(x, \xi^l).$$

La aproximación mejora, si se elige $\mathcal{S}^{u+1}$ tal que cada $S^l \in \mathcal{S}^{u+1}$ esta totalmente contenido en algún componente de la partición anterior, $S^{l'} \in \mathcal{S}^u$,

$$\mathcal{Q}^1(x) \leq ... \leq \mathcal{Q}^u(x) \leq \mathcal{Q}^{u+1}(x) \leq \mathcal{Q}(x).$$

El objetivo es obtener la mejor aproximación en cada refinamiento de la partición, eligiendo la región a dividir que resulte en la mejor aproximación.

Acotamiento Inferior: elección de partición

Si además se tiene una cota superior $UB(S^l) \geq \mathbb{E}[Q(x,\xi)|\xi \in S^l]$ para cada S^l, entonces la región S^l que al dividirse podría reducir más el error de aproximación, sería aquella que maximiza

$$p^l[UB(S^l) - Q(x,\xi^l)].$$

En un espacio de N dimensiones, dadas las regiones rectangulares $S^l = [a_1^l, b_1^l] \times ... \times [a_N^l, b_N^l]$, el objetivo es encontrar la coordenada i-ésima y el punto de corte c_i^l tal que S^l se divide en las particiones

$$[a_1^l, b_1^l] \times ... \times [a_i^l, c_i^l] \times ... \times [a_N^l, b_N^l] \text{ y}$$

$$[a_1^l, b_1^l] \times ... \times [c_i^l, b_i^l] \times ... \times [a_N^l, b_N^l].$$

Acotamiento Superior 1/4

A partir de la convexidad de $Q(x, \xi)$ y propiedades métricas de ξ se pueden obtener cotas superiores de $\mathbb{E}_\xi[Q(x, \xi)]$.

Dada una función $Q(x, \xi)$ convexa en ξ sobre un soporte acotado $\Xi = [a, b]$ (unidimensional), entonces es posible reemplazar la distribución de ξ por una distribución de dos puntos (trapezoidal en a y b) que establece una cota superior de $Q(x, \xi)$.

El segmento de recta $U(x, \xi)$ entre los puntos $(a, Q(x, a))$ y $(b, Q(x, b))$ es cota superior de $Q(x, \xi)$,

$$U(x, \xi) = \frac{Q(x, b) - Q(x, a)}{b - a}(\xi - a) + Q(x, a)$$

$$U(x, \xi) = \frac{Q(x, b) - Q(x, a)}{b - a}\xi + \frac{b}{b - a}Q(x, a) - \frac{a}{b - a}Q(x, b).$$

Acotamiento Superior 2/4

El segmento $U(x,\xi)$:

$$U(x,\xi) = \frac{Q(x,b) - Q(x,a)}{b-a}\xi + \frac{b}{b-a}Q(x,a) - \frac{a}{b-a}Q(x,b).$$

$$U(x,\xi) = \frac{b-\xi}{b-a}Q(x,a) + \frac{\xi - a}{b-a}Q(x,b).$$

La esperanza del segmento $U(x,\xi)$ con respecto a ξ:

$$\mathbb{E}_\xi[U(x,\xi)] = \frac{b-\mathbb{E}[\xi]}{b-a}Q(x,a) + \frac{\mathbb{E}[\xi] - a}{b-a}Q(x,b).$$

Acotamiento Superior 3/4

Sean $\lambda(a)$ y $\lambda(b)$ las medidas de probabilidad en los puntos a y b

$$\lambda(a) := \frac{b - \mathbb{E}[\xi]}{b-a}, \quad \lambda(b) := \frac{\mathbb{E}[\xi] - a}{b-a}.$$

La cota obtenida es

$$UB^{EM}(x) = \mathbb{E}_\xi[U(x,\xi)] = \lambda(a)Q(x,a) + \lambda(b)Q(x,b) \geq \mathbb{E}_\xi[Q(x,\xi)].$$

Esta es una aproximación trapezoidal de un intervalo con dos puntos extremos.

Acotamiento Superior 4/4

La cota para un intervalo se extiende a multiples dimensiones.
Sean $\Xi = [a_1, b_1] \times ... \times [a_N, b_N]$ los componentes.
Si $Q(x, \xi)$ es separable en los componentes, la cota se establece en cada componente separadamente.
Si los componentes $i = 1, ..., N$ son estocasticamente independientes, la cota se establece a partir del producto de todas las combinaciones de cada intervalo,

$$UB^{EM}(x) = \sum_{e \in \text{ext } \Xi} \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{|\bar{\xi}_i - e_i|}{b_i - a_i} Q(x, e) \right).$$

Donde $\bar{\xi}_i$ es la media del componente i, y los puntos extremos de Ξ son $e \in \text{ext } \Xi = \{(a_1, a_2, ..., a_N), (a_1, a_2, ..., b_N), ..., (b_1, b_2, ..., b_N)\}$.

Acotamiento en Método L

Se utilizan las cotas inferiores para la linearización exterior de la función de recurso y se establece el criterio de parada con las cotas superiores.

Los cortes generados en las aproximaciones de acotamiento inferior de $\mathcal{Q}(x)$ permanecen validos a medida que se refinan las aproximaciones.

Sean $\mathcal{Q}_j^L(x)$ y $\mathcal{Q}_j^U(x)$ las aproximaciones inferior y superior j-ésimas de $\mathcal{Q}(x)$; entonces sus límites en j al refinarse la aproximación convergen a $\mathcal{Q}(x)$.

Sean P_j^L y P_j^U las medidas de probabilidad de las aproximaciones j-ésimas inferior y superior.

Método L con Acotamiento 1/4

Para aproximaciones de distribuciones y funciones de recurso genéricas.

Paso 0. Inicializar $v := r := s := 0$.

Paso 1. Establecer $v := v + 1$. Resolver el problema maestro

$$\begin{array}{cl} \min_{x,\theta} & z = c^\tau x + \theta \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & D_l x \geq d_l, \quad l = 1, ..., r, \\ & E_l x + \theta \geq e_l, \quad l = 1, ..., s, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Sea (x^v, θ^v) su solución óptima. Si $s = 0$ entonces $\theta^v := -\infty$.

Método L con Acotamiento 2/4

Paso 2. Sea Ξ^ν el soporte de la aproximación de cota inferior.
Para todo $\xi_j = (h_j, T_j, q_j) \in \Xi^\nu$ resolver

$$\begin{array}{cl} \min_{y,w^+,w^-} & u = e^\tau w^+ + e^\tau w^- \\ \text{s.a} & Wy + Iw^+ - Iw^- = h_j - T_j x^\nu, \\ & y, w^+, w^- \geq 0, \end{array}$$

donde $e^\tau = (1, ..., 1)$, hasta que para algún ξ_j, el valor óptimo $u > 0$.
En dicho caso, sea λ^ν la solución dual asociada, se definen

$$D_{r+1} := (\lambda^\nu)^\tau T_j \quad \text{y} \quad d_{r+1} := (\lambda^\nu)^\tau h_j.$$

Agregar la restricción $D_{r+1}x \geq d_{r+1}$ (corte de factibilidad) al problema maestro, establecer $r := r + 1$ e ir al Paso 1.
Si para todo ξ_j, $u = 0$, ir al Paso 3.

Método L con Acotamiento 3/4

Paso 3.
Determinar la j-ésima aproximación de cota inferior

$$\mathcal{Q}_j^L(x^\nu) = \mathbb{E}_{P_j^L}[Q_j^L(x^\nu, \xi)]$$

Sea $\pi^\nu(\xi)$ la solución dual óptima del problema con recurso para la aproximación j-ésima.
Se definen

$$E_{s+1} := \mathbb{E}_{P_j^L}[(\pi^\nu(\xi))^\tau \mathbf{T}], \quad e_{s+1} := \mathbb{E}_{P_j^L}[(\pi^\nu(\xi))^\tau \mathbf{h}].$$

Si $e_{s+1} - E_{s+1}x^\nu = \mathcal{Q}_j^L(x^\nu) \leq \theta^\nu$, entonces x^ν es la solución óptima con respecto a la cota inferior, ir al Paso 4.
En otro caso, agregar la restricción $E_{s+1}x - \theta \geq e_{s+1}$ (corte de optim.) al problema maestro, establecer $s := s + 1$ e ir al Paso 1.

Método L con Acotamiento 4/4

Paso 4.
Determinar la j-ésima aproximación de la cota superior

$$\mathcal{Q}_j^U(x^v) = \mathbb{E}_{P_j^U}[Q_j^U(x^v, \xi)]$$

Si $\mathcal{Q}_j^U(x^v) \leq \theta^v$, entonces x^v es la solución óptima, FIN.
En otro caso, refinar las aproximaciones de cota inferior y superior. Establecer $v := v + 1$ e ir al Paso 3.