Optimización bajo Incertidumbre
6. Métodos de resolución

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Técnicas de resolución de grandes problemas de programación lineal

Generación retrasada de columnas (variables) [Dantzig-Wolfe, 1960]

1. Se reduce el problema a un subconjunto de sus variables.
2. Se resuelve el problema reducido corriente.
3. Se determina una variable excluida del subconjunto que tiene costo reducido que mejora el objetivo corriente (sin calcular los costos reducidos de todas las variables excluidas).
4. Se incorpora la variable y se reitera (2.) hasta que no haya dichas variables.

Generación retrasada de restricciones (planos de corte) [Benders, 1962]

1. Se relaja el problema usando un subconjunto de sus restricciones.
2. Se resuelve el problema relajado corriente.
3. Se determina una restricción excluida del conjunto que no verifica la solución corriente (sin evaluar todas las restricciones excluidas).
4. Se incorpora la restricción y se reitera (2.) hasta que no haya dichas restricciones.

Problema lineal de dos etapas

Dado un número finito de realizaciones de la segunda etapa y funciones lineales, el problema se puede formular en forma extensiva como un programa lineal determinista equivalente.

Los métodos de resolución tienen en cuenta la estructura del problema para ser eficientes.

El *método L* se basa en una descomposición o aproximación lineal externa (cortes) de la función de costo del recurso.

Formulación extensiva

Se asume que ξ tiene soporte finito, con realizaciones $\xi_k = (q_k, h_k, T_k)$ y distribución de probabilidad p_k para $k = 1, ..., K$.

El problema en *forma extensiva* (EF), donde a cada realización se asocia la decisión de segunda etapa y_k, es

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k q_k^T y_k & \\ \text{s.a} & Ax = b, & \\ & T_k x + W y_k = h_k, & k = 1, ..., K, \\ & x \geq 0, y_k \geq 0, & k = 1, ..., K. \end{array}$$

Forma equivalente determinista o proyectada

Dada una decisión de primer etapa x, las decisiones de segunda etapa y pueden obtenerse resolviendo para cada $k = 1, ..., K$, el problema

$$\begin{array}{rll} Q(x, \xi_k) = & \min_y & q_k^T y \\ & \text{s.a} & Wy = h_k - T_k x, \\ & & y \geq 0, \end{array}$$

donde $Q(x, \xi_k) := \infty$ si el problema es no factible.

Entonces, el problema general, denominado *maestro*, es

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k Q(x, \xi_k) \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Dualización del problema de segunda etapa

Dado el problema k-ésimo de segunda etapa (denominado primal)

$$\begin{array}{ll} \min_y & q_k^T y \\ \text{s.a} & Wy = h_k - T_k x, \\ & y \geq 0, \end{array}$$

su problema dual es

$$\begin{array}{ll} \max_\pi & \pi^T (h_k - T_k x) \\ \text{s.a} & \pi^T W \leq q_k^T. \end{array}$$

La región factible, $P_k = \{\pi | \pi^T W \leq q_k^T\}$, se asume no vacía.
Sean $\sigma_{i(k)}, i(k) = 1, ..., I_k$ y $\rho_{j(k)}, j(k) = 1, ..., J_k$ los puntos extremos y los rayos extremos de P_k, respectivamente.

Condiciones de factibilidad y optimalidad

Dado que P_k no es vacío, el problema dual tiene solución óptima y $Q(x, \xi_k)$ es finita, o el óptimo es infinito y el problema primal es no factible.
Se cumple $Q(x, \xi_k) < \infty$, si y solo si

$$(\rho_{j(k)})^T (h_k - T_k x) \leq 0, \quad \forall j(k). \qquad (1)$$

Cuando $Q(x, \xi_k)$ es finita, la solución óptima tiene lugar en un punto extremo de P_k, en particular

$$Q(x, \xi_k) = \max_{i(k)=1,\ldots,I_k} (\sigma_{i(k)})^T (h_k - T_k x).$$

Equivalentemente, $Q(x, \xi_k)$ es el menor valor de z_k tal que

$$(\sigma_{i(k)})^T (h_k - T_k x) \leq z_k, \quad \forall i(k). \qquad (2)$$

Las condiciones de factibilidad (1) y de optimalidad (2) permiten reformular el problema general.

Reformulación con condiciones sobre puntos y rayos extremos

Incorporando las condiciones de factibilidad y optimalidad en el problema maestro se tiene una reformulación del problema general

$$
\begin{array}{ll}
\min_{x,z} & c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k z_k \\
\text{s.a} & Ax = b, \\
 & (\rho_{j(k)})^T (h_k - T_k x) \leq 0, \quad k = 1, ..., K, j(k) = 1, ..., J_k, \\
 & (\sigma_{i(k)})^T (h_k - T_k x) \leq z_k, \quad k = 1, ..., K, i(k) = 1, ..., I_k, \\
 & x \geq 0.
\end{array}
$$

Esta formulación reduce la cantidad de variables a expensas de incorporar muchas restricciones.
En el proceso iterado de resolución solo es necesario incluir las restricciones que no verifiquen la solución que se este evaluando.

Combinación de las condiciones de optimalidad según realizaciones (1/2)

Los siguientes problemas son equivalentes en términos de solución

$$\begin{array}{ll} \min_x & c^T x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a} & x \in K_1 \cap K_2, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,\theta} & c^T x + \theta \\ \text{s.a} & \mathcal{Q}(x) \leq \theta, \\ & x \in K_1 \cap K_2. \end{array}$$

donde $\mathcal{Q}(x) = \sum_{k=1}^{K} p_k Q(x, \xi_k)$.

Dada una decisión de primer etapa x^ν, sea π_k^ν la solución al problema dual de segunda etapa k-ésimo,

$$Q(x^\nu, \xi_k) = (\pi_k^\nu)^T (h_k - T_k x^\nu).$$

entonces su esperanza es

$$\mathcal{Q}(x^\nu) = \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^\nu)^T (h_k - T_k x^\nu).$$

Combinación de las condiciones de optimalidad según realizaciones (2/2)

Debido a la convexidad de $Q(x,\xi_k)$ se cumple $Q(x,\xi_k) \geq (\pi_k^\nu)^T(h_k - T_k x)$ y su esperanza es

$$\mathcal{Q}(x) \geq \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^\nu)^T (h_k - T_k x).$$

La restricción $\mathcal{Q}(x) \leq \theta$ implica que se debe cumplir

$$\theta \geq \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^\nu)^T (h_k - T_k x).$$

Si (x^ν, θ^ν) es solución óptima, entonces $\mathcal{Q}(x^\nu) \leq \theta^\nu$.
Si $\mathcal{Q}(x^\nu) > \theta^\nu$, entonces es necesario establecer una restricción

$$\theta \geq \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^\nu)^T (h_k - T_k x),$$

para imponer $\mathcal{Q}(x) \leq \theta$.

Método de resolución L (1/3)

Resuelve el problema general mediante una linearización exterior de $\mathcal{Q}(x)$ que adiciona cortes de factibilidad, y cortes de optimalidad combinados según realizaciones.

Paso 0. Inicializar $v := r := s := 0$.
Paso 1. Establecer $v := v + 1$. Resolver el problema maestro

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\theta} & z = c^T x + \theta \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & D_l x \geq d_l, \quad l = 1, ..., r, \\ & E_l x + \theta \geq e_l, \quad l = 1, ..., s, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Sea (x^v, θ^v) su solución óptima.
Si $s = 0$ entonces $\theta^v = -\infty$ y no se considera en el cálculo de x^v.

Método de resolución L (2/3)

Paso 2. Para $k = 1, ..., K$, resolver el problema de factibilidad

$$\begin{array}{ll} \min_{y,w^+,w^-} & u = e^T w^+ + e^T w^- \\ \text{s.a} & Wy + Iw^+ - Iw^- = h_k - T_k x^\nu, \\ & y, w^+, w^- \geq 0, \end{array}$$

donde $e^T = (1, ..., 1)$, hasta que para algún k, el valor óptimo $u > 0$.
En dicho caso, sea λ^ν la solución dual asociada, se definen

$$D_{r+1} := (\lambda^\nu)^T T_k \quad \text{y} \quad d_{r+1} := (\lambda^\nu)^T h_k.$$

Agregar la restricción $D_{r+1} x \geq d_{r+1}$ (corte de factibilidad) al problema maestro, establecer $r := r + 1$ e ir al *Paso 1*.
Si para todo k, $u = 0$, ir al *Paso 3*.

Método de resolución L (3/3)

Paso 3. Para $k = 1, ..., K$, resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \min_y & q_k^T y \\ \text{s.a} & Wy = h_k - T_k x^v, \\ & y \geq 0, \end{array}$$

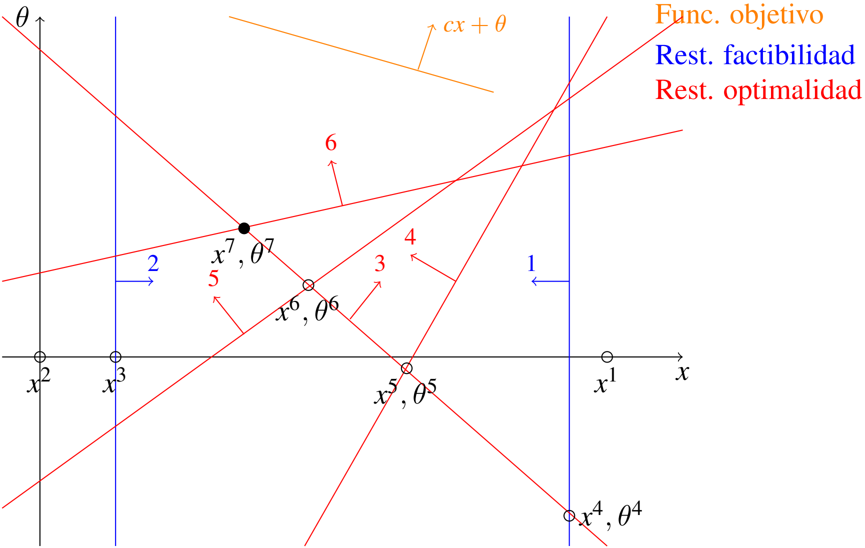
Sea π_k^v la solución dual óptima del problema k, se definen

$$E_{s+1} := \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^v)^T T_k \quad \text{y} \quad e_{s+1} := \sum_{k=1}^{K} p_k (\pi_k^v)^T h_k.$$

Si $e_{s+1} - E_{s+1} x^v \leq \theta^v$, entonces x^v es la solución óptima, FIN.

Sino, agregar la restricción $E_{s+1} x + \theta \geq e_{s+1}$ (corte de optimalidad) al problema maestro, establecer $s := s + 1$ e ir al *Paso 1*.

Ejemplo de evolución del método L



Método L de cortes múltiples (1/3)

Resuelve el problema general mediante una linearización exterior de $\mathcal{Q}(x)$ que adiciona cortes de factibilidad, y cortes de optimalidad para cada realización $k = 1, ..., K$.

Paso 0. Inicializar $v := r := 0$, y $s(k) := 0, k = 1, ..., K$.
Paso 1. Establecer $v := v + 1$. Resolver el problema maestro

$$
\begin{array}{ll}
\min_{x,\theta} & z = c^T x + \sum_{k=1}^{K} \theta_k \\
\text{s.a} & Ax = b, \\
& D_l x \geq d_l, \quad l = 1, ..., r, \\
& E_{l(k)} x + \theta_k \geq e_{l(k)}, \quad l = 1, ..., s(k), k = 1, ..., K, \\
& x \geq 0.
\end{array}
$$

Sea $(x^v, \theta_1^v, ..., \theta_K^v)$ su solución óptima. Si $s(k) = 0, k = 1, ..., K$ entonces $\theta_k^v = -\infty$ y no se considera en el cálculo de x^v.

Método L de cortes múltiples (2/3)

Paso 2. Para $k = 1, ..., K$, resolver el problema de factibilidad

$$\begin{array}{ll} \min_{y,w^+,w^-} & u = e^T w^+ + e^T w^- \\ \text{s.a} & Wy + Iw^+ - Iw^- = h_k - T_k x^v, \\ & y, w^+, w^- \geq 0, \end{array}$$

donde $e^T = (1, ..., 1)$, hasta que para algún k, el valor óptimo $u > 0$.
En dicho caso, sea λ^v la solución dual asociada, se definen

$$D_{r+1} := (\lambda^v)^T T_k \quad \text{y} \quad d_{r+1} := (\lambda^v)^T h_k.$$

Agregar la restricción $D_{r+1}x \geq d_{r+1}$ (corte de factibilidad) al problema maestro, establecer $r := r + 1$ e ir al *Paso 1*.
Si para todo k, $u = 0$, ir al *Paso 3*.

Método L de cortes múltiples (3/3)

Paso 3. Para $k = 1, ..., K$, resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \min_y & q_k^T y \\ \text{s.a} & Wy = h_k - T_k x^\nu, \\ & y \geq 0, \end{array}$$

Sea π_k^ν la solución dual óptima del problema k, se definen

$$E_{s(k)+1} := p_k(\pi_k^\nu)^T T_k \quad \text{y} \quad e_{s(k)+1} := p_k(\pi_k^\nu)^T h_k.$$

Si $e_{s(k)+1} - E_{s(k)+1}x^\nu > \theta_k^\nu$, entonces agregar la restricción $E_{s(k)+1}x + \theta_k \geq e_{s(k)+1}$ (corte de optimalidad) al problema maestro, establecer $s(k) := s(k) + 1$.
Si $e_{s(k)+1} - E_{s(k)+1}x^\nu \leq \theta_k^\nu$, para todo $k = 1, ..., K$, entonces x^ν es la solución óptima, FIN; en otro caso ir al *Paso 1*.

Resolución Recurso Simple (1/3)

Cuando $W = [I, -I]$, donde separando según componentes $y = (y^+, y^-)$ y $q = (q^+, q^-)$; entonces, los valores óptimos de $y_i^+(\omega)$ e $y_i^-(\omega)$ son determinados por el signo de $h_i(\omega) - T_{i.}(\omega)x$ cuando $q_i = q_i^+ + q_i^- \geq 0$ con probabilidad uno.

Dados q y T fijos, las propiedades de separabilidad de $\mathcal{Q}(x)$ permiten

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{m_2} \mathcal{Q}_i(x) \quad \text{donde} \quad \mathcal{Q}_i(x) = \mathbb{E}_\omega[Q_i(x, \xi(\omega))]$$

$$Q_i(x, \xi(\omega)) = q_i^+(h_i(\omega) - T_{i.}x)^+ + q_i^-(-h_i(\omega) + T_{i.}x)^+$$

Estableciendo $\chi_i = T_{i.}x$ y $\Psi(\chi) = \mathcal{Q}(x)$, el problema queda

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \Psi(\chi) \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & Tx = \chi, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Resolución Recurso Simple (2/3)

Si h_i tiene función de distribución asociada F_i entonces

$$
\begin{aligned}
\Psi(\chi) &= \sum_{i=1}^{m_2} \Psi_i(\chi_i) \\
\Psi_i(\chi_i) &= \int_{h_i} \Psi_i(\chi_i, \xi_i) \mathrm{d}F(h_i), \\
&= q_i^+ \int_{h_i > \chi_i} (h_i - \chi_i) \mathrm{d}F(h_i) - q_i^- \int_{h \leq \chi_i} (h_i - \chi_i) \mathrm{d}F(h_i) \\
&= q_i^+ \bar{h}_i - q_i^+ \chi_i - q_i \int_{h \leq \chi_i} (h_i - \chi_i) \mathrm{d}F(h_i)
\end{aligned}
$$

Si Ξ es acotado tal que $\alpha_i < h_i \leq \beta_i$, para todo i, entonces

$$
\Psi_i(\chi_i) = \begin{cases}
q_i^+ \bar{h}_i - q_i^+ \chi_i, & \text{si} \quad \chi_i \leq \alpha_i, \\
q_i^+ \bar{h}_i - q_i^+ \chi_i - q_i \int_{h \leq \chi_i} (h_i - \chi_i) \mathrm{d}F(h_i), & \text{si} \quad \alpha_i < \chi_i \leq \beta_i, \\
-q_i^- \bar{h}_i + q_i^- \chi_i, & \text{si} \quad \chi_i \geq \beta_i.
\end{cases}
$$

Cuando el parámetro aleatorio es continuo se aplica programación no lineal. En cambio, si el parámetro es discreto se puede aplicar programación lineal.

Resolución Recurso Simple (3/3): Parámetro aleatorio discreto

Se asume que cada h_i puede tomar valores $h_{ij}, j = 1, ..., K_i$ tales que $h_{i1} < h_{i2} < ... < h_{iK}$, con probabilidad p_{ij}.
Se divide χ_i en valores χ_{ij} correspondientes a cada intervalo $[h_{ij}, h_{ij+1}]$ tales que

$$\chi_i = \sum_{j=0}^{K_i} \chi_{ij}, \quad \chi_{i0} \leq h_{i1}, \quad 0 < \chi_{ij} < h_{ij+1} - h_{ij}, \quad 0 \leq \chi_{iK_i}. \quad (*)$$

Los coeficientes del objetivo, que corresponden a la pendiente de $\Psi_i(\chi_i)$ en cada uno de estos intervalos, son

$$d_{i0} = -q_i^+, \quad d_{ij} = -q_i^+ + q_i \sum_{l=1}^{j} p_{il}, j = 1, ..., K_i.$$

El problema original es equivalente al problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + \sum_{i=1}^{m_2} (q_i^+ \bar{h}_i + \sum_{j=0}^{K_i} d_{ij} \chi_{ij}) \\ \text{s.a} & Ax = b, \quad Tx = \chi, \quad (*), \quad x \geq 0. \end{array}$$