Optimización bajo Incertidumbre
5. Valor de los Modelos Estocásticos

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Modelado de incertidumbre

Los modelos permiten la comprensión, el análisis y la resolución de problemas; implican abstracciones que reflejan las interacciones relevantes del sistema-problema.

Simplificación insuficiente implica costos extras o incapacidad de resolución.
Simplificación excesiva representa inviabilidad debido a falta de realismo.

Dado un problema, ¿vale la pena modelar la incertidumbre?

Importancia de Modelar la Incertidumbre

Un modelo determinista puede incluir períodos de tiempo pero todas sus decisiones son establecidas sin opciones. Frecuentemente se reemplazan variables aleatorias por sus esperanzas o se resuelven instancias del problema para distintos escenarios y luego se integran las soluciones.

El modelo determinista puede no ser tan representativo como el estocástico, aunque es en general más fácil de resolver. El valor esperado de la información perfecta y el valor de la solución estocástica permiten cuantificar la comparación.

Es difícil saber si incluir la incertidumbre es ventajoso sin resolver antes los modelos o obtener cotas de sus soluciones.

Problema de distribución

Dado el problema según escenario $\xi := (q, h, T)$

$$\begin{array}{ll} \min_x z(x,\xi) := & c^T x + \min_y \{q^T y | Wy = h - Tx, y \geq 0\} \\ \text{s.a} & Ax = b, x \geq 0. \end{array}$$

se supone que existe solución óptima $x^*(\xi)$ con valor óptimo $z(x^*(\xi), \xi)$ para todo $\xi \in \Xi$.

El valor esperado del valor del óptimo es

$$WS := \mathbb{E}_\xi[\min_x z(x,\xi)] = \mathbb{E}_\xi[z(x^*(\xi), \xi)]$$

denominado “esperar y ver” (wait and see).

Valor Esperado de la Información Perfecta

Dados la solución óptima x^* y el valor óptimo del *problema con recurso*,

$$RP := \min_x \mathbb{E}_\xi [z(x, \xi)].$$

El *valor esperado de la información perfecta* se define como

$$EVPI := RP - WS.$$

EVPI representa la pérdida de beneficio debido a la presencia de incertidumbre, o el beneficio máximo a obtener si se conociera el futuro.

Valor de la Solución Estocástica

El *problema de valor esperado* (obtenido al reemplazar la variables aleatorias con sus valores esperados, $\bar{\xi} = \mathbb{E}_\xi[\xi]$) tiene solución óptima $x^*(\bar{\xi})$ y valor óptimo

$$EV := \min_x z(x, \bar{\xi}).$$

El *resultado esperado de usar la solución EV* es

$$EEV := \mathbb{E}_\xi[z(x^*(\bar{\xi}), \xi)].$$

El *valor de la solución estocástica* se define como

$$VSS := EEV - RP;$$

representa el beneficio de la solución estocástica sobre la solución de valor esperado.

Relaciones de valor

a. Dado un problema de minimización: $WS \leq RP \leq EEV$.

b. Dado un problema de maximización: $WS \geq RP \geq EEV$.

c. Dado un problema de minimización:

$$EVPI := RP - WS \geq 0, \quad VSS := EEV - RP \geq 0.$$

e. Dado un problema de maximización:

$$EVPI := WS - RP \geq 0, \quad VSS := RP - EEV \geq 0.$$

e. Dado un problema con q, T y W deterministas: $EV \leq WS$.

f. Dado un problema con q y W deterministas:

$$EVPI \leq EEV - EV, \quad VSS \leq EEV - EV.$$

Magnitud de valores

Las magnitudes de EVPI y VSS indican el valor de la optimización bajo incertidumbre.

Intuitivamente, se piensa que usar modelos estocásticos es más adecuado cuanto mayor es la aleatoriedad del problema; pero esto no ocurre en general.

Alternativa, utilizar cotas de dichos valores que no requieran la resolución completa; por ejemplo $EVPI \leq EEV - EV, \quad VSS \leq EEV - EV.$

Otra alternativa, es utilizar escenarios de referencia; por ej. peor caso (escenario de mayor demanda).